

Estudio teórico y experimental sobre el aprendizaje de conceptos y procedimientos inferenciales en secundaria

Angustias Vallecillos
Antonio Moreno

1. Introducción

La formación estadística y probabilística de los ciudadanos del mundo moderno es una necesidad reconocida hoy día en los sistemas educativos para todos los niveles de enseñanza, no sólo para la educación superior, NCTM (2000), MEC (1990, 1992). En Andalucía, las últimas reformas curriculares para los niveles de secundaria han incluido la inferencia estadística como novedad. Los contenidos recomendados para la ESO, Junta de Andalucía (1992; 2002), se refieren a la obtención de datos y a los métodos para su análisis así como al acercamiento intuitivo a la representatividad de las muestras y a las afirmaciones que cabe extraer de su estudio. Para el caso del Bachillerato, Junta de Andalucía (1994; 1997), el currículo incluye el muestreo, los problemas relacionados con la elección de las muestras, las condiciones para su representatividad y el análisis de las conclusiones que cabe extraer de su estudio, así como la iniciación al muestreo y sus distintos tipos.

La enseñanza de la estadística ha propiciado un florecimiento de la investigación en Educación Estadística muy prometedora que está aportando información teórica y empírica sobre los procesos de aprendizaje de los estudiantes de todos los niveles educativos.

Esta nueva situación de la enseñanza de la estadística en todo el mundo ha propiciado un florecimiento del campo de la investigación en Educación Estadística muy prometedor que está aportando información teórica y empírica acerca de los procesos de aprendizaje de los estudiantes de todos los niveles de enseñanza muy útiles para informar la enseñanza y el aprendizaje, especialmente en los primeros niveles. Aunque ya tenemos algunas investigaciones valiosas, Garfield (1998), Garfield y Ahlgren (1988), en el ámbito de la probabilidad Konold (1991), Garfield y del Mas (1989), y de la estadística, Pegg (1992), Pfannkuch y Rubick (2002), es necesario todavía un gran esfuerzo en la investigación teórica que pueda proporcionar modelos propios desarrollados en el seno de nuestro propio campo de trabajo. Antecedentes en esta línea son los trabajos de Wild y Pfannkuch (1999) sobre el razonamiento estadístico o los de Jones y cols. (1997; 1999; 2000) sobre el razonamiento probabilístico y estadístico.

En esta línea se inscribe también nuestro trabajo que formula, refina y valida un marco teórico inicial que describe el razonamiento en inferencia estadística elemental en estudiantes de secundaria.

2. Objetivos

La investigación de referencia, Moreno (2003), se planteó con un doble objetivo: a) describir el conocimiento informal de los

alumnos participantes sobre los conceptos inferenciales básicos y b) formular y validar un marco teórico para la instrucción y la evaluación de la estadística inferencial elemental. Este marco teórico, ERIE, está situado en el modelo de desarrollo cognitivo SOLO, Bigg y Collis (1982; 1991) y en la línea del formulado por Jones y cols. (2000) para el razonamiento estadístico. Ha sido validado con la participación de estudiantes del nivel de secundaria.

3. Antecedentes

En Moreno (2003) puede verse este apartado con detenimiento que aquí sólo vamos a resumir. Basado en la taxonomía SOLO, en Jones y cols. (2000) se describe un esquema para caracterizar el pensamiento estadístico elemental. Se identifican cuatro constructos, cuatro niveles cognitivos en cada uno de ellos y se desarrollan descriptores para todos ellos que son utilizados después en la elaboración de los protocolos de entrevistas realizadas a los estudiantes seleccionados. Otros esquemas basados en la taxonomía SOLO son los propuestos por Jones y cols. (1997; 1999; 2000) para el pensamiento probabilístico y estadístico, y Jones y cols. (1994; 1996) para caracterizar el aprendizaje de conceptos numéricos.

Reading y Pegg (1996) y Reading (1996, 1998) utilizaron la taxonomía SOLO en un estudio sobre la comprensión estadística de estudiantes de una escuela rural de secundaria de Australia.

Watson y Moritz (1998; 2000a; 2000b) han aplicado la taxonomía SOLO para la comparación de conjuntos de datos y en estudios sobre la media y en problemas de muestreo, respectivamente. Watson y Moritz (1999) describe un estudio realizado con el fin de analizar la comprensión de los estudiantes sobre el concepto de media y las aplicaciones de ésta como medida representativa de un conjunto de datos.

En el campo específico de la inferencia, Moreno y Vallecillos (2001) y Vallecillos y Moreno (2003; 2005a; 2005b) describen el aprendizaje de estudiantes de secundaria sobre algunos aspectos clave como los de población y muestra o los tipos de muestreo. Vallecillos (1999) resume problemas de aprendizaje detectados en el tema del contraste de hipótesis que, en muchos casos, están relacionados con dificultades previas con aspectos clave como los anteriormente citados.

4. Metodología

En Moreno (2003) se describe un trabajo que tiene un doble carácter teórico y empírico. En la fase teórica se realizó una revisión exhaustiva de la literatura de investigación en el campo del aprendizaje y la enseñanza de la estadística.

Para el estudio empírico, en primer lugar se realizó un estudio piloto con alumnos de dos cursos de secundaria distintos, 3º de ESO y COU, elegidos intencionalmente y,

una vez analizados los resultados obtenidos, se formuló el marco teórico ERIE inicial. Seguidamente se revisó el cuestionario empleado y se elaboró el que se ha empleado con una muestra formada por estudiantes de cuatro cursos del nivel de secundaria, 3º y 4º de ESO y 1º y 2º de Bachillerato, con fines experimentales. Como resultado final, tanto del estudio teórico como de los dos estudios empíricos, hemos podido formular, refinar y validar inicialmente el ERIE que proponemos.

Posteriormente se realizaron entrevistas semiestructuradas a un grupo reducido de estudiantes de esos mismos cursos que fueron grabadas en audio y transcritas. Sobre las respuestas obtenidas en casos seleccionados hemos llevado a cabo un análisis cualitativo pormenorizado, Miles y Huberman (1994). Los resultados obtenidos nos han permitido analizar, en situación de laboratorio, la validez inicial y la aplicabilidad del marco teórico ERIE así como trazar los perfiles de razonamiento inferencial de los alumnos entrevistados.

4.1. Cuestionario

El cuestionario empleado en el segundo estudio empírico consta de cinco partes que son, en realidad, cinco cuestionarios distintos. El primero de ellos tiene un carácter introductorio, en el segundo, tercero y cuarto se presentan al alumno las cuestiones relativas a los constructos 'Población y muestra'(PM), 'Proceso de

inferencia' (PI), y 'Tamaño de la muestra' (TAM) en los tres contextos considerados y el quinto se refiere al constructo 'Tipos de muestreo' (TIM).

Para la realización de las entrevistas a los alumnos hemos empleado este mismo cuestionario. Los alumnos seleccionados lo han cumplimentado antes de realizar la misma, después el investigador ha revisado sus respuestas y seleccionado los ítems sobre los que ha realizado las preguntas pertinentes.

4.2. Muestra

En los estudios empíricos se han empleado tres muestras distintas de alumnos:

1. La muestra piloto está formada por 49 estudiantes pertenecientes a dos cursos distintos de secundaria, 30 de 3º de ESO y 19 COU, y a dos Institutos de Enseñanza Secundaria públicos andaluces.
2. La muestra experimental se ha conformado con 81 alumnos de los cuatro cursos del nivel de secundaria: 3º y 4º de ESO y 1º y 2º de Bachillerato. Han sido 23 estudiantes de 3º y 35 de 4º de ESO, en total 58 alumnos. En Bachillerato han participado 10 estudiantes de 1º y 13 de 2º, en total 23 alumnos. La muestra ha sido diversificada en los cuatro cursos citados con el fin de estudiar en mejor forma la evolución en las respuestas al cuestionario.

3. Para el estudio de casos se han realizado entrevistas a ocho estudiantes seleccionados intencionalmente de esos mismos cursos, con un buen nivel académico, repartidos equitativamente entre ambos géneros y por cursos y con habilidades comunicativas.

5. Análisis de resultados: el marco teórico ERIE

La revisión de la literatura de investigación del campo y la taxonomía SOLO nos ha permitido diseñar y llevar a cabo un estudio que ha tenido como uno de sus productos finales la formulación, refinamiento y validación del marco teórico ERIE que pretende caracterizar la inferencia estadística elemental, en relación con su enseñanza, y que describimos a continuación. ERIE consta de cuatro constructos, 'Población y muestra' (PM), 'Proceso de inferencia' (PI), 'Tamaño muestral' (TAM) y 'Tipos de muestreo' (TIM) y cuatro niveles de razonamiento en cada uno de ellos, idiosincrásico (N1), de transición (N2), cuantitativo (N3) y analítico (N4), que constituyen un continuo de principio a fin. A continuación describimos inicialmente los constructos y niveles formulados.

5.1. Descripción de los cuatro constructos

Los contenidos correspondientes a la estadística inferencial destinados para la enseñanza en el nivel de secundaria se han

estructurado en cuatro grandes bloques, dos de ellos dedicados a la descripción de la inferencia y dos más dedicados a la validez de la misma que son los siguientes:

- Consideramos un primer constructo articulado sobre los conceptos de población y muestra y sus relaciones que llamamos 'Población y muestra' (PM). Éste es un constructo básico sobre el que se han planteado cinco cuestiones distintas: referidas a la identificación y al concepto de población (PM1) a la identificación y al concepto de muestra (PM2), a la variabilidad muestral (PM3), a la representatividad muestral (PM4) y a la descripción del espacio muestral (PM5).
- Un segundo constructo que engloba todos los aspectos relacionados con la descripción de la población a partir del estudio de la muestra que llamamos 'Proceso de inferencia' (PI). Sobre éste se han determinado las concepciones de los alumnos (Artigue, 1990) sobre el proceso global.

Estos dos constructos proporcionan conjuntamente una caracterización del proceso de inferencia de la muestra a la población. Como consideramos que es importante caracterizar también la 'calidad' de la inferencia, con este fin hemos determinado los siguientes dos constructos:

- 'Tamaño muestral' (TAM) engloba todos los contenidos relacionados con el

tamaño de las muestras y su apreciación o no por los estudiantes. Se incluyen cuestiones que se refieren al tamaño de la muestra (TAM1) y con la aproximación del tamaño de la muestra (TAM2), siempre en relación con la realización de inferencias.

- 'Tipos de muestreo' (TIM) engloba, como su mismo nombre indica, los distintos tipos de muestreo, no aleatorios y aleatorios, así como los distintos tipos dentro de cada uno de ellos. Se incluyen cuestiones sobre la aleatorización y reconocimiento de sesgos (TIM1), sobre el muestreo aleatorio frente al no aleatorio (TIM2) y sobre el muestreo aleatorio simple frente al muestreo aleatorio estratificado (TIM3).

5.2. Descripción de los cuatro niveles

En cada uno de los constructos anteriores hemos determinado cuatro niveles de razonamiento que podemos describir, muy en síntesis y en general para todos los constructos, de la siguiente manera:

- *Idiosincrásico (N1)*: se clasifican en este nivel las repuestas de los alumnos que, o bien no abordan la cuestión o bien responden de una manera totalmente subjetiva y ajena a la pregunta formulada.
- *De transición (N2)*: se agrupan aquí las respuestas que se centran en una única característica de la cuestión.

Por ejemplo, describen la población en términos del material que la compone, aunque sin identificarla realmente.

- *Cuantitativo (N3)*: hemos clasificado en este nivel las respuestas que emplean más de una característica de la cuestión. Por ejemplo, describen la población empleando tamaño, unidades que la componen o características de la misma, aunque no en forma completa o no en todos los contextos presentados.
- *Analítico (N4)*: las respuestas en este nivel incluyen varias características de la cuestión y las relacionan adecuadamente, por ejemplo, para describir completamente la población en estudio.

6. El marco teórico ERIE

Una vez determinados y caracterizados los cuatro constructos y los cuatro niveles en cada uno de ellos, queda completado el Esquema de Razonamiento en Inferencia Estadística (ERIE) que se resume en la Tabla 1, en la página 66.

7. Conclusiones

En este trabajo hemos resumido el proceso de construcción, de un marco teórico inicial que caracteriza el razonamiento inferencial en el nivel de secundaria que hemos llamado ERIE. El marco teórico ERIE así formulado nos ha resultado muy

útil para analizar la estructura de las respuestas de los estudiantes a cuestiones sobre conceptos inferenciales elementales. Como conclusión final de todos los resultados obtenidos en los dos estudios empíricos, hemos comprobado que ERIE nos ha permitido evaluar el conocimiento informal de los estudiantes sobre los cuatro constructos en que hemos articulado los contenidos de la estadística inferencial elemental. El estudio de casos realizado posteriormente nos ha permitido validar, en una primera fase, el marco ERIE. Afirmamos que se trata de una primera fase porque creemos que la verdadera prueba de fuego, y en consecuencia su validación definitiva, ha de llevarse a cabo en el campo de la instrucción normal y en las condiciones experimentales necesarias para ello. Esta segunda fase de diseño de la enseñanza basado en ERIE y su aplicación en clases regulares en la enseñanza secundaria constituye un proyecto de investigación independiente que se está desarrollando en la actualidad.

El marco ERIE formulado incluye la caracterización de los cuatro niveles que incluyen estos dos modos de pensamiento para cada uno de los cuatro constructos teóricos fijados. Los resultados de las entrevistas realizadas posteriormente nos han permitido realizar una aplicación, en situación de laboratorio, del ERIE a estudiantes seleccionados y hemos podido comprobar que es posible situar a cada uno de los alumnos en

su nivel en función del análisis de sus respuestas al cuestionario y al entrevistador.

Consideramos, por tanto, que ERIE puede ser válido para caracterizar el aprendizaje de la estadística inferencial elemental en el nivel de secundaria.

ERIE también nos permite evaluar de manera global el aprendizaje de la estadística inferencial. Además de situar al alumno en su estado de aprendizaje, el paso de un nivel a otro supone también un aprendizaje, luego podemos establecer las diferencias entre los niveles de estructuración de la respuesta en términos de aprendizaje, como el aumento en la capacidad para manejar más conceptos. Por ejemplo, relacionar el concepto de variabilidad muestral y el de tamaño muestral pero, además, relacionar éste con la variabilidad de la población y el tamaño de la población.

El aprendizaje, a la luz del marco teórico desarrollado, implica una mayor capacidad de interrelación en la respuesta a las tareas de inferencia propuestas.

En relación con la aplicación del esquema ERIE, hemos podido observar que los alumnos de los cursos académicos más altos han tenido, globalmente, menos dificultades para responder los cuestionarios presentados. De hecho, las respuestas de estos alumnos se distribuyeron principalmente entre los niveles

más altos de respuesta del esquema ERIE, de acuerdo con la distribución por niveles que cabía esperar para estos alumnos.

Las respuestas de los alumnos de los primeros cursos se distribuyen en los niveles inferiores del esquema ERIE, manifestando mayor número de dificultades, en conjunto, para establecer relaciones entre los conceptos implicados en el proceso realización y valoración de inferencias. Los alumnos de estos niveles inferiores de estructuración de la respuesta manifiestan numerosas concepciones previas que dificultan el aprendizaje de los conceptos inferenciales analizados.

Hemos podido comprobar también, en términos generales, la existencia de numerosos casos de *décalage*, un mismo alumno da respuestas de distinto nivel en distintos constructos y, en ocasiones, en distintos contextos de presentación de la cuestión. Este resultado tiene un gran interés didáctico ya que aleja la ilusión de posible simplificación de la enseñanza y plantea con toda claridad el problema real de la gran dificultad de la enseñanza del tema en los niveles de enseñanza secundaria. Esta situación, junto a la necesidad social de mejorarla, echa sobre los hombros de los investigadores en Educación Estadística la responsabilidad de investigar ampliamente sobre este tema, con cuyas aportaciones únicamente se conseguirá finalmente su mejora.

Tabla 1
Marco teórico ERIE

Constructos	Niveles			
	N1: Idiosincrásico	n2: De transición	n3: Cuantitativo	n4: Analítico
POBLACIÓN Y MUESTRA (PM)	El estudiante emplea el concepto de población usual. No emplea los términos estadísticos de población o muestra. No identifica la población ni la muestra en la mayoría de los contextos. No reconoce la variabilidad muestral. No construye el espacio muestral.	El estudiante emplea el concepto de población usual. Puede presentar dificultades con el uso del término estadístico. Se centra en elementos simples para definir la muestra, una sola característica o un ejemplo. Ocasionalmente puede referirse a más de una pero sin relacionarlas. Identifica la población pero no la muestra en la mayoría de los contextos. Reconoce la variación entre las distintas muestras pero la atribuye al azar, como si de una causa sobrenatural se tratara.	El estudiante describe la población basándose en mas de una característica aunque no de una forma completa. Define el concepto de población en términos estadísticos. Describe la muestra en varios contextos y se hace utilizando todos los elementos necesarios aunque sin relacionarlos. Reconoce la variabilidad muestral, aunque no en todos los contextos, y la explica en términos estadísticos. Construye el espacio muestral en contexto concreto y lo hace sistemáticamente.	El estudiante describe completamente la población y se refiere a ella en términos estadísticos. Identifica la muestra en todos los contextos y la describe empleando todos los elementos necesarios relacionándolos adecuadamente. Reconoce la variabilidad muestral y la justifica en términos estadísticos. Identifica el espacio muestral y lo construye sistemáticamente.
PROCESO DE INFERENCIA (PI)	El alumno aborda la tarea pero no la completa. Las respuestas obedecen a	El alumno da respuestas condicionadas por un único aspecto: variabilidad	El alumno describe la composición de la población como similar a	El estudiante manifiesta que no se puede conocer la composición de la

Tabla 1
Marco teórico ERIE (continuación)

Constructos	Niveles			
	n1: Idiosincrásico	n2: De transición	n3: Cuantitativo	n4: Analítico
	<p>expectativas personales sobre la composición de la población en la mayoría de los contextos. Manifiesta la concepción previa.</p>	<p>(concepción determinista), sesgo de equiprobabilidad o naturaleza de la población. Manifiesta la concepción determinista.</p>	<p>la de la muestra en la mayoría de los contextos. Usa criterios numéricos para su cálculo. Manifiesta la concepción identidad.</p>	<p>población estudiando una de sus muestra. Usa criterios numéricos y lenguaje formal para expresarla. Manifiesta la concepción inferencial.</p>
TAMAÑO DE LA MUESTRA (TAM)	<p>El alumno manifiesta indiferencia ante el tamaño de la muestra. la estimación se basa en criterios personales. Ausencia de criterio para establecer un tamaño de muestra adecuado en la mayoría de los contextos.</p>	<p>Selecciona el tamaño basándose en aspectos poco relevantes como expectativas sobre la población o facilidad de cálculo. Expresa ideas deterministas sobre el muestreo. Selecciona un tamaño muestral basándose en un único aspecto relevante en la mayoría de los contextos.</p>	<p>El estudiante reconoce la influencia del tamaño de la muestra en la estimación aunque no las relaciona o lo hace subjetivamente. Usa criterios para establecer un tamaño de muestra adecuado en la mayoría de los contextos.</p>	<p>El alumno reconoce la influencia del tamaño de la muestra y emplea criterios estadísticos elaborados. Analiza la adecuación del tamaño de la muestra al de la población de estudio.</p>
TIPOS DE MUESTREO (TIM)	<p>La respuesta sobre la elección del método de</p>	<p>Distingue algunos tipos de muestreo utilizando</p>	<p>Reconoce los sesgos en el muestreo no aleatorio</p>	<p>Reconoce la posibilidad de la presencia de sesgos en</p>

Tabla 1
Marco teórico ERIE (continuación)

Constructos	Niveles			
	n1: Idiosincrásico	n2: De transición	n3: Cuantitativo	n4: Analítico
muestreo está sujeta a expectativas personales irrelevantes.	términos estadísticos pero no tiene criterios para distinguir entre muestreos aleatorios. Los métodos de muestreo no le parecen adecuados, prefiere los censos. No valora los métodos aleatorios ni identifica fuentes de sesgos.	aunque no siempre identifica las fuentes. Reconoce que los muestreos no aleatorios presentan más sesgos que los aleatorios. Distingue entre los muestreo aleatorios pero no siempre correctamente.	los muestreos no aleatorios e identifica sus fuentes. Prefiere el muestreo aleatorio sobre el no aleatorio para realizar una encuesta. Encuentra diferencias entre los distintos métodos aleatorios.	

8. Referencias

- BIGGS, J. B. y COLLIS, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy*. New York: Academic Press.
- BIGGS, J. B. y COLLIS, K. F. (1991). Multimodal learning and intelligent behavior. En H. D. Rowe (Ed.): *Intelligence: Reconceptualization and measurement* (pp. 57-76). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated Inc.
- GARFIELD, J. (1998). The statistical Reasoning Assessment: development and validation of a research tool. In Pereira-Mendoza, L.; Kea, L.; Kee, T. And Wong, W. (Eds.): *Proceeding of the Fifth ICOTS* (pp. 781-786). Singapore.
- GARFIELD, J. y AHLGREN, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1), 44-63.
- GARFIELD, J. y DEL MAS, R. (1989). Reasoning about chance events: Assessing and changing students' conception of probability. En C. Maher, G. Goldin, y B. Davis (Eds.): *The Proceedings of the Eleven Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. II (pp. 189-195). Rutgers: Rutgers University Press.
- JONES, G. A., LANGRALL, C. W., THORNTON, C. A., y MOGILL, A. T. (1997). A framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 101-125.
- JONES, G. A., LANGRALL, C. W., THORNTON, C. A., y MOGILL, A. T. (1999). Students' probabilistic thinking in instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 487-519.
- JONES, G. A., THORNTON, C. A., y PUTT, I. J. (1994). A model for nurturing and assessing multidigit number sense among first grade children. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 117-143.
- JONES, G. A., THORNTON, C. A., PUTT, I. J., HILL, K. M., MOGILL, A. T., RICH, B. S., y VAN ZOEST, L. R. (1996). Multidigit number sense: A framework for instruction and assessment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 310-336.
- JONES, G. A.; THORNTON, C. A.; LANGRALL, C. W.; MOONEY E. S.; PERRY, B. y PUTT, I. J. (2000). A Framework for Characterizing Children's Statistical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 30(5), 269-309.
- JUNTA DE ANDALUCÍA (1992). Decreto 106/1992 de 9 de Junio (BOJA del 20) por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la E.S.O. en Andalucía.
- JUNTA de ANDALUCÍA (1994). Decreto 126/1994 de 7 de Junio (BOJA del 26 de Julio) por el que se establecen las enseñanzas correspondientes al Bachillerato en Andalucía.
- JUNTA de ANDALUCÍA (1997). Currículo de Bachillerato en Andalucía.

- JUNTA de ANDALUCÍA (2002). Decreto 148/2002, de 14 de Mayo, por el que se modifica el decreto 106/1992, de 9 de Junio, por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía (ESO). (BOJA nº 75 de 27 de Junio).
- KONOLD, C. (1991). Understanding Students' beliefs About Probability. In E. von Glaserfeld (Ed.): *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 139-156). The Netherlands: Kluwer Academic Publisher.
- MEC (1990). Ley Orgánica 1/1990 de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE, BOE de 4 de Octubre).
- MEC (1992). Decreto por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes al Bachillerato (BOE 253).
- MILES, M. B. y HUBERMAN, A. M. (1994). *Qualitative data Analysis*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- MORENO, A. (2000). *Investigación y Enseñanza de la Estadística Inferencial en el nivel de secundaria*. Granada: El autor.
- MORENO, A. (2003). *Estudio teórico y experimental sobre el aprendizaje de conceptos y procedimientos inferenciales en el nivel de secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- MORENO, A. y VALLECILLOS, A. (2001). Exploratory Study on Inferential' Concepts Learning in Secondary Level in Spain. In M. van der Heuvel (Ed.): *Proceedings of the 25th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education (PME)*, p. 343. The Netherlands: Freudenthal Institute and Utrecht University.
- NCTM (2000). *Principles and standards for schools mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- PEGG, J. (1992). Assessing students' understanding at the primary and secondary level in the mathematical sciences. In J. Izard y M. Stephens (Eds): *Reshaping Assessment Practice: Assessment in the Mathematical Sciences Under Challenge* (pp. 368-385). Melbourne: Australian Council of Educational Research.
- PFANNKUCH, M. y RUBICK, A. (2002). An exploration of students' statistical thinking with given data. *Statistics Education Research Journal*, 1(2), 4-21.
- READING, C. (1996). *An Investigation into Students' Understanding of Statistics*. Ph. D. University of New England, Armindale, Australia.
- READING, C. (1998). Reaction to Data: Students Understanding of Data Interpretation. In Pereira-Mendoza, L.; Kea, L.; Kee, T. And Wong, W. (Eds.): *Proceeding of the Fifth ICOTS* (pp. 1427-1433). Singapore.
- READING, C. y PEGG, J. (1996). Exploring Understanding of Data Reduction. In: A. Gutierrez (Ed.): *Proceeding of the 20th PME*. Valencia, Spain.
- VALLECILLOS, A. (1999). Some empirical evidences on learning difficulties about testing hypotheses. Invited paper. Bulletin of the 52nd Session of the International Statistical Institute, Vol. 2, 201-204. The Netherlands: ISI.

- VALLECILLOS, A. y MORENO, A. (2003). Initial conception about sampling types in secondary level students. *Bulletin of the International Statistical Institute, Contributed Papers*. Vol. LX, Book 2 (pp. 566-567). Berlin: ISI.
- VALLECILLOS, A. y MORENO, A. (2005a). A framework for teaching and assessing elemental inferential statistical reasoning. *Bulletin of the 55th Session of the International Statistical Institute*. CD ROM. Sydney: ISI.
- VALLECILLOS, A. y MORENO, A. (2005b). Influencia del contexto en la comprensión de los conceptos de población y muestra en estudiantes de secundaria. *V Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática (CIBEM)*. CD ROM. Oporto: Universidad de Oporto.
- WATSON, J. y MORITZ, J. (1998). The Beginning of Statistical Inference: Comparing Two Data Sets. *Educational Studies in Mathematics*, 37(2), 145-168.
- WATSON, J. M. y MORITZ, J. B. (1999). The development of concepts of average. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 21(4), 15-39.
- WATSON, J. M. y MORITZ, J. B. (2000a). Developing concepts of sampling. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), 44-70.
- WATSON, J. M. y MORITZ, J. B. (2000b). The longitudinal development of understanding of average. *Journal of Mathematical Thinking and Learning*, 2(1-2), 11-50.
- WILD, C. y PFANNKUCH, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Inquiry. *International Statistical Review*, 63(3), 223-265.

Anexo: cuestionarios

A continuación describimos los cuestionarios empleados. El cuestionario 1 tiene un carácter introductorio para el alumno. Tiene como finalidad recordar los términos y familiarizarlo con el texto, por lo que no lo incluimos. El 2, que se sitúa en el contexto concreto, se incluye completo. Los cuestionarios 3 y 4 incluyen las mismas preguntas que el 2 pero en los contextos narrativo y numérico, por lo que sólo incluimos la redacción inicial de ambos cuestionarios. Sobre esos textos se hacen al alumno el mismo tipo preguntas (las mismas pero contextualizadas) que contiene el cuestionario 2. El cuestionario 5, que se refiere a los tipos de muestreo y la identificación de sesgos, se incluye completo.

Cuestionario 2: Contexto concreto

Tenemos una bolsa con 100 alubias que pueden ser de dos colores, rojo y blanco, y queremos estudiar el número de alubias de cada color que hay en la bolsa. Para ello sacamos cinco de esas alubias y miramos cuántas alubias blancas y rojas hemos cogido.

PM1. ¿Cuál es la población objeto de estudio?

PM2. ¿Cuál es la muestra utilizada para el estudio?

PI1. ¿Cuántas alubias rojas crees que habrá en la bolsa?

¿Puedes indicar la razón?

PM3. Si sacamos varias veces muestras de cinco alubias, ¿piensas que todas tendrán el mismo número que ha salido antes de alubias rojas? ¿Por qué sí o por qué no?

PM4. Si sacamos 100 muestras de cinco alubias, ¿cuántas crees que tendrán la cantidad de alubias rojas que le salieron a tu profesor?

PM5. Escribe todas las combinaciones diferentes de alubias rojas y blancas que puede haber en una muestra de cinco alubias.

Imagínate que sacamos 100 muestras de 5 alubias cada una. Dime cuántas crees que habría de cada una de las combinaciones anteriores.

TAM1. Antes hemos sacado 5 alubias de la bolsa que contiene 100 alubias de dos colores.

Imagínate que sacamos 10 alubias de la bolsa y obtenemos 6 rojas y 4 blancas. Indica cuál crees que es la composición de alubias de colores en la bolsa y explica tu respuesta.

Imagínate ahora que sacamos 25 alubias de la bolsa que contiene 100 alubias de dos colores y obtenemos 5 rojas y 15 blancas. Indica cuál es la composición de alubias de colores en la bolsa y explica tu respuesta.

¿Cuál de las muestras anteriores crees que nos proporciona una idea más aproximada del número de alubias de cada color en la bolsa? ¿Por qué?

TAM2. ¿Crees que 25 alubias son suficientes para darnos una idea de cuántas alubias rojas y blancas hay en la bolsa?

¿Por qué sí o por qué no?

TAM2. ¿Cómo sabes cuántas alubias son suficientes para hacernos una idea apropiada del número de alubias blancas y rojas que hay en la bolsa?

Cuestionario 3: Contexto narrativo

El Ayuntamiento se plantea quitar un parque para construir unos aparcamientos y se desea conocer la opinión al respecto de los 4.000 habitantes mayores de 18 años. Para ello se encuesta a 200 de ellos y se obtiene como resultado que el 75% (150) no desea que se quite el parque.

Cuestionario 4: Contexto numérico

En la siguiente tabla se muestran 100 medidas ordenadas de modo que cada una de ellas se puede referenciar por un número de dos dígitos desde el 00 (21) al 99 (18). Necesitamos tener

una estimación de la media de todas las medidas. Para ello seleccionamos aleatoriamente cinco de ellas: 23, 26, 24, 26, 27 y calculamos la media de estas cinco medidas que es 25,2.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	21	25	19	22	26	14	18	24	21	23
2	22	22	12	17	17	13	15	30	21	27
3	26	25	22	24	21	29	11	26	20	20
4	20	28	21	16	22	22	19	31	18	24
5	18	23	19	16	15	29	17	16	19	23
6	37	20	27	28	23	19	25	28	24	14
7	20	24	30	26	29	27	24	21	18	24
8	25	23	27	35	33	31	16	25	27	18
9	26	19	17	28	21	13	23	25	20	18

Situados en cada uno de estos dos contextos anteriores se hacen al alumno las preguntas correspondientes tal como están redactadas en el Cuestionario 2_.

Cuestionario 5: Tipos de muestreo y sesgos

1. (TIM3). De una baraja de cartas hemos extraído los ases. Al resto de cartas se les asignan los valores siguientes

2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K
2 3 4 5 6 7 8 9 10 10 10 10

La media de los valores es $\frac{2 + 3 + 4 + \dots + 9 + 4 \times 10}{12} = 7$

Señala con un círculo la que creas que es la mejor estimación de esta media:

- Barajamos las cartas y sacamos dos cartas aleatoriamente. Obtenemos la media de estas dos cartas.
- Ponemos en un montón las cartas de valor menor o igual que 7, en otro las cartas de valor mayor que 7. Sacamos una carta de cada montón y obtenemos la media de las dos.
- No hay diferencia entre los dos métodos.
- Ninguno de los dos, yo haría:

2. La Junta de Andalucía desea conocer cuál es el porcentaje de institutos que guardan papel para reciclar. Hay 3000 institutos en Andalucía. Si el gobierno encuentra que la mayoría de los institutos no reciclan, entonces tendrán que gastar dinero en propaganda para concienciar

en la necesidad de reciclar. Si encuentra que la mayoría de los institutos ya están reciclando, ellos pueden gastar ese dinero en otras cosas. Varias empresas han realizado encuestas para estudiar si los institutos guardan papel para reciclar.

TIM1. La primera compañía envió cartas a todos los institutos de Andalucía (3000 institutos). Cada carta preguntaba si guardaban papel para reciclar o no. 1500 institutos contestaron a sus cartas pero otros 1500 no lo hicieron. De los institutos que contestaron a las cartas, 91% (1365) dijeron que sí guardaban papel para reciclar y el 9% (135) dijeron que no.

¿Qué piensas de su encuesta?

(Elige tu respuesta)

- a) Está bien realizada b) Está mal realizada c) No estoy seguro

Explica tu elección.

TIM1. La segunda compañía que realiza encuestas preguntó a los 1.500 institutos que celebraron el Día del Árbol en Andalucía si ellos guardaban papel para reciclar o no. Encontraron que el 90% recicla y el 10% no recicla.

¿Qué piensas de su encuesta?

(Elige tu respuesta)

- a) Está bien realizada b) Está mal realizada c) No estoy seguro

Explica tu elección

TIM1. *La tercera empresa tiene una lista con todos los nombres de los institutos de Andalucía. Escriben cada nombre en un papel y los introducen en una caja. Sacan el nombre de 1500 institutos y los llaman. Encuentran que el 28% de los institutos dicen que reciclan y el 72% dicen que no reciclan papel.*

¿Qué piensas de su encuesta?

(Elige tu respuesta)

a) *Está bien realizada*

b) *Está mal realizada*

c) *No estoy seguro*

Explica tu elección

TIM2. *Si le tuvieses que decir al gobierno cómo se hace una encuesta para saber si los institutos guardan papel para reciclar, ¿qué harías?*

a) *Yo les diría que lo hicieran como la primera compañía.*

b) *Yo les diría que lo hiciesen como la segunda compañía.*

c) *Yo les diría que lo hiciesen como la tercera compañía.*

d) *Yo les diría que no lo hiciesen como ninguna de esas compañías. Lo haría de este modo:*

Resumen

En este artículo describimos una investigación realizada con el fin de estudiar el conocimiento informal que los estudiantes de secundaria tienen de la estadística inferencial y desarrollar un marco teórico para su enseñanza que hemos llamado ERIE (acrónimo de Esquema de Razonamiento en Inferencia Estadística). ERIE está situado en el modelo evolutivo SOLO descrito por Biggs y Collis (1982; 1991) y ha sido formulado, refinado y validado mediante dos estudios empíricos y un estudio de casos llevados a cabo con estudiantes de este nivel de enseñanza. Consta de cuatro constructos y cuatro niveles de razonamiento en cada uno de ellos. Los constructos son 'Población y muestra' (PM), 'Proceso de inferencia' (PI), 'Tamaño muestral' (TAM) y 'Tipos de muestreo' (TIM) y en cada uno de ellos los niveles de razonamiento son un continuo desde el idiosincrásico hasta el analítico.

Los resultados empíricos muestran que ERIE puede caracterizar el aprendizaje de la inferencia estadística elemental y puede servir para evaluarla. ERIE, Moreno (2003), es una

contribución al conocimiento teórico en el campo de la Educación Estadística y puede ayudar en la organización de la enseñanza específica en cursos introductorios.

Palabras clave: marco teórico, inferencia estadística, enseñanza secundaria.

Abstract

In this article we describe a research we have carried out in order to study the informal knowledge of inferential Statistics that Secondary Education students have and to develop a theoretical frame for its teaching. We have named it ERIE (an acronym for "Esquema de Razonamiento en Inferencia Estadística", Framework for Reasoning in Inferential Statistics).

ERIE is based on the evolutive model SOLO described by Biggs and Collins (1982;1991) and has been formulated, refined and validated using two empirical studies and a case study carried out on students at this education level. It has four constructs, each one including four levels of reasoning. The constructs are: "Population and Sample" (PM), "Inference Process" (PI), "Sample Size" (TAM), and "Types of sampling" (TIM). The levels of reasoning are continuous from Idiosyncratic to Analytical.

The empirical results show that ERIE can characterise the learning of elementary Statistical Inference and can be used to evaluate it. ERIE (Moreno, 2003) is a contribution to the theoretical knowledge in the field of Statistical Education and can help the organization of specific teaching in introductory courses.

Key words: theoretical framework, statistical inference, secondary school level.

Angustias Vallecillos

Antonio Moreno

*Departamento Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación. Campus de Cartuja
Universidad de Granada*