

La influencia de los errores conceptuales en la enseñanza de las matemáticas en la universidad__

E. A. Sánchez Pérez
L. M. García Raffi
J. V. Sánchez Pérez

I. Introducción

En la actualidad, una de las líneas de investigación más productivas en didáctica de las ciencias es el análisis de la influencia de los errores conceptuales de los estudiantes en la adquisición de nuevos conocimientos. Una prueba de ello es el hecho de que es posible encontrar en la literatura científica una gran cantidad de referencias a estudios realizados en esta dirección (Clement y col. (1998), Martí (1996)). Generalmente estos estudios se enmarcan en el contexto de lo que se conoce como enseñanza para el cambio conceptual, que constituye una de las líneas actuales más productivas en la enseñanza de las ciencias (Hewson y Beeth (1995), Duschl (1995), Gil y col. (1991)). Esto es debido, en parte, a que se trata de una cuestión que está muy ligada a ciertos presupuestos teóricos ampliamente aceptados por los profesionales de la didáctica. De hecho, uno de los pilares esenciales sobre los que descansa la fundamentación teórica de nuestro sistema de estudios es la

Aunque la investigación educativa sobre errores conceptuales (EC) tenga su campo de acción más amplio y divulgado en la enseñanza media, también existen trabajos que pretenden realizar un seguimiento en este ámbito de los alumnos tras su incorporación a la universidad. Este es el caso que nos presentan los autores.

naturaleza *constructiva* del aprendizaje. Desde los primeros pasos dentro del sistema educativo, los estudiantes adquieren conocimientos que, además de constituir un objetivo en sí mismos en función de su utilidad práctica, serán utilizados en los niveles superiores como base para la enseñanza de conceptos más abstractos (Gil y col. (1991)). Esta situación se hace especialmente patente en las materias científicas, y en particular, en la enseñanza de las matemáticas: la aritmética que se enseña en la educación primaria forma parte de los elementos culturales básicos de cualquier individuo, pero sería impensable la adquisición de los contenidos matemáticos propios de la enseñanza secundaria sin estos conocimientos.

Esta concepción evolutiva en la enseñanza de las matemáticas nos conduce a considerar cuáles son los presupuestos teóricos con respecto a las capacidades intelectuales de los estudiantes en las que se basa. Generalmente se admite, siguiendo las ideas de J. Piaget y de otros investigadores, que el desarrollo intelectual durante la adolescencia y aún después se circunscribe al ámbito de las llamadas operaciones lógico-formales, aunque en la actualidad se están reconsiderando estos planteamientos, que quizá sean excesivamente reduccionistas (Corral (1995)). Una vez superada la educación secundaria, es posible la introducción de una mayor abstracción en la enseñanza, lo cual permite la comprensión de las materias formales en toda su complejidad. Éste es habitualmente

el enfoque en la educación universitaria. En este planteamiento no parece quedar claro el papel de la contextualización de los conocimientos adquiridos, aunque éste es precisamente uno de los factores importantes en la enseñanza de las matemáticas (J.M. Núñez y V. Font (1995), C. Sáenz (1995)). En nuestra opinión, el problema radica precisamente en la aplicación de las matemáticas elementales, que son perfectamente conocidas por los estudiantes universitarios, en contextos inmediatos. Por poner un ejemplo que estudiaremos con detalle posteriormente, podemos considerar un error conceptual básico el hecho de escribir incorrectamente mediante una fórmula una relación de proporcionalidad.

La idea central que queremos desarrollar en este artículo es la siguiente: es posible que algunas deficiencias conceptuales que consideramos errores básicos, en realidad, *no* tengan ninguna influencia en la adquisición de los nuevos conocimientos científicos propios de los temarios de las asignaturas universitarias, aunque evidentemente sí la tengan en el desarrollo de ciertas aptitudes que consideramos fundamentales en los futuros universitarios, como la capacidad crítica y la creatividad en la resolución de problemas. Estas cualidades son propias de lo que generalmente entendemos, en un sentido amplio, como madurez intelectual. Sin embargo, muchos de los alumnos de los primeros cursos incorporan los conocimientos impartidos en las aulas universitarias

mediante los mecanismos característicos de las operaciones lógico-formales que han empleado durante toda la formación anterior, es decir, aprendiendo los procedimientos de resolución de problemas sin la reflexión que debería conducirles a la posterior aplicación creativa de los nuevos conceptos en contextos más generales. Por lo tanto, las asignaturas de ciencias, que supuestamente deberían proveerles de la base conceptual necesaria para sus estudios posteriores, no les dotan de la deseable comprensión globalizadora de todos los conocimientos adquiridos, si no que sólo amplían el conjunto de técnicas formales que manejan con habilidad. Deberíamos, en este sentido, cuestionar la adecuación de los presupuestos teóricos que conducen a una excesiva insistencia en el desarrollo del pensamiento lógico-formal en cualquier etapa de la enseñanza, desatendiendo los aspectos intuitivos. En este aspecto, nuestra opinión coincide plenamente con la de A. Corral (Corral, 1995). Pretendemos, con nuestro estudio aportar nuevos datos que pensamos muestran las consecuencias que tienen este tipo de prácticas educativas excesivamente formales en la posterior enseñanza universitaria.

II. Metodología y plateamiento del trabajo

Desde este punto de vista es perfectamente comprensible el hecho que hemos observado en las aulas de nuestra universidad.

Como parte de las asignaturas de álgebra, cálculo y mecánica que se cursan en el primer curso de las Ingeniería Técnica de Obras Públicas de la Universidad Politécnica de Valencia, venimos realizando, desde hace tres años, unas prácticas interdisciplinarias en el aula de informática. En ellas se plantean problemas de aplicación práctica de los contenidos explicados en las tres asignaturas, que los estudiantes deben resolver en grupos. Éste es el contexto en el que desarrollamos nuestra línea de investigación en didáctica de las ciencias (Sánchez y col. (1999)). Los estudiantes deben presentar una memoria de las prácticas realizadas. En ellas, y en las tutorías en las que plantean sus preguntas, hemos podido observar que existen ciertos errores de aplicación de conceptos elementales de matemáticas y mecánica que se repiten en un tanto por cien muy alto de estudiantes. Posiblemente, el problema más complicado a la hora de plantear un estudio sistemático sobre este tema sea el de determinar con precisión el tipo de contenidos que consideramos "elementales". Desde nuestro punto de vista, esta cuestión tiene tantas respuestas como proyectos de investigación se han llevado a cabo sobre este asunto. En nuestro caso, y a partir de los errores más comúnmente observados en nuestros alumnos, hemos centrado nuestro análisis en dos puntos, que son los siguientes:

I. Conceptos elementales de geometría y mecánica: volúmenes y pesos. En las

magnitudes geométricas fundamentales, con las que los estudiantes han tenido contacto desde la enseñanza primaria, suelen presentarse errores conceptuales fácilmente detectables. Además, las deficiencias en la aplicación de estos conocimientos en contextos concretos pueden condicionar la comprensión y posterior aplicación adecuada de teorías más abstractas.

2. Relaciones algebraicas básicas: proporcionalidad y ecuaciones lineales. Al igual que los del apartado anterior, los errores conceptuales relacionados con estos contenidos pueden tener consecuencias muy negativas en la aplicación de las matemáticas a problemas reales. La resolución correcta de sistemas de ecuaciones lineales muy complicados utilizando las técnicas del álgebra de matrices puede ser intrascendente si los estudiantes no son capaces de plantear un sistema asociado a un problema real.

Con el fin de aportar datos objetivos a nuestras conclusiones sobre las tendencias observadas en las prácticas anteriormente citadas, diseñamos un sencillo test sobre los contenidos básicos y avanzados de las materias implicadas, que son las que constituyen el bloque de conocimientos formales de la formación de los ingenieros, y que ya hemos citado anteriormente: álgebra, cálculo y mecánica. El test se utilizó al final del curso 1996/1997 con los alumnos de primer curso de la Escuela Técnica de Obras Públicas de la Universidad Politécnica de

Valencia, y las estadísticas y conclusiones que presentamos corresponden a las obtenidas a partir de estos datos. Del análisis independiente de las respuestas dadas a las diez preguntas de este test pudimos confirmar ciertas tendencias que ya habíamos observado sobre las deficiencias conceptuales fundamentales existentes. De la comparación de estos resultados con otras estadísticas correspondientes a las notas de los exámenes y de las prácticas de estos mismos alumnos, establecimos las correlaciones que lógicamente deben existir entre unos datos y los otros, en los casos en los que éstas se dan, e interpretamos desde nuestro punto de vista el problema en los casos en los que no se dan.

El test en cuestión que hemos diseñado consta de diez preguntas, de las cuales cuatro hacen referencia a contenidos básicos que todos los alumnos deberían conocer al acceder a los centros de formación universitaria. Las otras seis son preguntas específicas que implican conceptos de los temarios de las tres asignaturas citadas, pero de un nivel también muy elemental. Estas seis preguntas tienen también una relación directa con los temas tratados en las prácticas interdisciplinares que hemos comentado anteriormente. En la mayor parte de las cuestiones se proponen tres respuestas —entre ellas la correcta— de manera que los alumnos tienen que seleccionar una de ellas. El diseño de las preguntas de los dos grupos —que llamaremos "grupo de

preguntas de conceptos básicos" y "grupo de preguntas de conceptos avanzados"—responde a intenciones diferentes, como cabría esperar del planteamiento de la experiencia.

Los contenidos de las cuestiones del grupo de conceptos básicos hacen referencia a cuestiones geométricas elementales —como el cálculo del volumen de un cubo conociendo la longitud de un lado—, y al planteamiento de relaciones sencillas mediante ecuaciones lineales —como el reconocer la fórmula que representa una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes—. El grupo de cuestiones avanzadas, sin embargo, trata de conceptos más abstractos. Algunos ejemplos son: la interpretación de la derivada de una función real de variable real como una velocidad generalizada, el concepto de gradiente de una función de dos variables desde el punto de vista geométrico, o la clasificación de un sistema mecánico en estática en función de los grados de libertad y de la clasificación del sistema de ecuaciones lineales que lo representa. Todos estos contenidos deben ser perfectamente conocidos por los alumnos que hayan cursado las tres asignaturas implicadas en nuestro estudio. Como el lector puede comprobar, el planteamiento mismo de la experiencia no permite obtener conclusiones categóricas sobre el problema, aunque sí confirmar las tendencias comentadas anteriormente. Por otra parte, consideramos la muestra con la que hemos trabajado —104 tests resueltos— lo

suficientemente grande como para certificar la validez de nuestras conclusiones estadísticas.

III. Resultados estadísticos obtenidos

Para todos los cálculos estadísticos, hemos utilizado el programa SPSS. En primer lugar, presentamos la estadística descriptiva de los resultados del test de conceptos básicos. Sobre un total de 104, el *promedio de respuestas correctas* en cada una de las cuatro cuestiones de este grupo de preguntas es **80,75**, por lo que el *promedio de respuestas erróneas* es de **23,25**, siendo la desviación de estos promedios pequeña, lo que significa que aproximadamente el 20 por ciento de los alumnos de primer curso contesta mal a cada una de las preguntas de contenidos básicos. Las frecuencias de aciertos en los dos grupos de preguntas vienen dadas en las tablas 3.1 y 3.2.

Tabla 3.1

Respuestas acertadas	Número de alumnos	%
0	2	1,9
1	6	5,8
2	17	16,3
3	32	30,8
4	47	45,2

Tabla 3.2

Respuestas acertadas	Número de alumnos	%
0	0	0
1	2	1,9
2	7	6,7
3	14	13,5
4	25	24,0
5	39	37,5
6	17	16,3

Para analizar la influencia de los conocimientos implicados en el diseño de las preguntas del grupo de conceptos básicos y del grupo de conceptos avanzados, hemos aplicado un test de comparación de medias (t de Student) sobre las puntuaciones obtenidas por los alumnos de la muestra como notas finales de curso en las tres asignaturas, asumiendo que estas tres puntuaciones siguen una ley de distribución normal. Para ello, hemos utilizado como criterio de separación de la muestra inicial en cada caso, el haber "aprobado" o "suspendido" el test de conceptos básicos y el test de conceptos avanzados. Las notas que hemos utilizado de las tres asignaturas no están normalizadas, lo que justifica la disparidad entre sus valores medios; este hecho, obviamente, no afecta en absoluto a la aplicación del test de comparación de medias indicado, ya que se aplica por

separado a las puntuaciones de las tres asignaturas. A la vista de los resultados de las tablas 3.1 y 3.2, con el fin de que nos quedara aproximadamente el cincuenta por ciento en cada grupo, hemos considerado "superado" (puntuación 1) el grupo de preguntas de conceptos básicos si el alumno tenía las cuatro preguntas de este grupo bien contestadas, y el grupo de preguntas de conceptos avanzados si el alumno tenía cinco o seis preguntas correctamente contestadas. En otro caso, hemos considerado "no superado" (puntuación 0) el grupo de preguntas correspondiente. Los resultados obtenidos se presentan en las tablas 3.3 y 3.4, en las que aparecen cinco columnas. En la tercera se muestran las medias de las calificaciones finales de curso sin normalizar en las tres asignaturas, para el grupo de alumnos que no han superado el test correspondiente (0 en la columna segunda) y el grupo de alumnos que sí lo han superado (1 en la columna segunda). La columna quinta presenta el resultado de la aplicación del test t de Student: el nivel de significación p. Consideramos que las medias son significativamente *diferentes* cuando el valor de p es estrictamente menor que 0,1. El número total de alumnos en cada asignatura es diferente, ya que muchos de los alumnos que hicieron el test tenían ya aprobadas en este curso alguna de las asignaturas, o bien no se presentaron a los exámenes.

Tabla 3.3
*Medias comparadas de las notas finales de las tres asignaturas
 en el grupo de preguntas de conceptos básicos*

Asignatura	A/S test básico	No alumnos	Medias	Significación
Cálculo	0	39	5,3013	0,538
	1	31	5,5123	
Álgebra	0	37	3,8595	0,193
	1	29	4,4828	
Mecánica	0	20	6,0200	0,972
	1	24	6,0333	

Tabla 3.4
*Medias comparadas de las notas finales de las tres asignaturas en
 el grupo de preguntas de conceptos avanzados*

Asignatura	A/S test básico	No alumnos	Medias	Significación
Cálculo	0	28	5,1446	0,227
	1	42	5,5607	
Álgebra	0	30	3,6517	0,062
	1	36	4,5347	
Mecánica	0	19	5,5421	0,022
	1	25	6,3960	

Con respecto a las calificaciones obtenidas por los alumnos en el curso de prácticas interdisciplinarias anteriormente citado, se observa que existe una correlación positiva cuando se comparan las calificaciones obtenidas en este curso y en el test de conceptos avanzados. Sin embargo, no existe correlación cuando se compara con las calificaciones en el test de conceptos básicos.

IV. Análisis de los resultados y conclusiones

El primer resultado que es interesante destacar es la alta proporción de errores que se observa en el grupo de preguntas de conceptos básicos. El veinte por ciento de nuestros alumnos de primer curso contesta mal a cuestiones planteadas sobre contenidos

que deberían haber adquirido, en algunos casos, en la enseñanza primaria. Por ejemplo, en el caso de la formalización de las relaciones de proporcionalidad citado anteriormente, esta tendencia ya había sido observada en años anteriores en la realización del curso de prácticas: para expresar que x vale el triple que y , uno de cada cinco estudiantes escribe $3x=y$. La tabla 3.1 aporta más información sobre este particular: aunque el grupo mayoritario de alumnos (47) responde correctamente a todas las preguntas básicas, más del cincuenta por ciento se equivoca en al menos una de estas cuestiones. La tabla 3.2, que indica el número de alumnos que obtiene una puntuación determinada en el grupo de preguntas avanzadas, nos permite observar que en este caso el grupo mayoritario (39) contesta correctamente cinco de las seis cuestiones, siendo sólo 17 los estudiantes que contestan a todas correctamente. En este caso, más del cincuenta por cien contesta bien al menos a cinco preguntas.

Pero los resultados más interesantes de nuestro estudio vienen dados en las tablas 3.3 y 3.4. Se observa que en todas las asignaturas existe una diferencia entre las medias de las calificaciones de los alumnos que han obtenido una calificación buena y los que no lo han hecho en los dos grupos de preguntas, y que además esta diferencia tiene el signo adecuado. Es decir, la media de las calificaciones es mayor si la puntuación en los tests es mejor. Sin embargo, esta

diferencia sólo es *significativa* en dos casos, que son las asignaturas de álgebra y mecánica con respecto al test de *preguntas avanzadas*, observándose también en Cálculo que la diferencia entre medias aumenta de la tabla 3.3 a la 3.4. La influencia de los resultados en el test de *conceptos básicos* en la diferencia entre medias no es, en ningún caso, *significativa*. Aun teniendo en cuenta el escaso número de preguntas en cada grupo, y los posibles errores en el diseño y adecuación de nuestro test, consideramos que este resultado es, cuanto menos, llamativo, ya que parece indicar la tendencia de que en realidad los posibles defectos formativos de nuestros alumnos en cuestiones básicas pueden no ser determinantes para la superación de nuestras asignaturas. Los conceptos específicos, que corresponden al segundo grupo de preguntas, que resultan sin embargo determinantes, como cabría esperar. Debemos recordar que, aunque las preguntas que aparecen en este grupo son muy sencillas, corresponden a contenidos de nuestras asignaturas. La correlación observada entre las calificaciones de las prácticas y el segundo test parece confirmar lo anterior.

Con esta experiencia hemos querido corroborar lo que ya habíamos venido observando en los años anteriores de nuestra experiencia docente. La enseñanza universitaria en las materias formales, al menos en el caso de los estudiantes de ingeniería, no parece servir para afianzar definitivamente y generalizar los conceptos previamente

aprendidos con el fin de aplicarlos posteriormente a las asignaturas específicas de ingeniería; más bien parece superponer sobre una base conceptual mal asimilada una serie de técnicas específicas, a veces muy complejas, pero sin una conexión clara con lo anterior. Ésta es la principal conclusión de nuestro trabajo. Nuestra interpretación de este hecho sigue la línea del análisis realizado por A. Corral. La falta de atención a los factores intuitivos y la excesiva insistencia en la enseñanza de las habilidades propias del pensamiento lógico-formal en la educación secundaria y universitaria conduce a un dominio óptimo de las técnicas formales que no necesariamente conlleva su aplicación correcta. Esto es especialmente llamativo en lo que se refiere a las cuestiones que hemos calificado de básicas. Por tanto, la mayor complejidad conceptual de los conocimientos que

se imparten en la universidad, con la consecuente necesidad de abstracción, no conduce necesariamente a una mayor capacidad para la aplicación en contextos prácticos, incluso si éstos son muy simples.

En nuestra opinión, ésta es una consecuencia "a largo plazo" de unos métodos educativos excesivamente centrados en el desarrollo de las aptitudes lógico formales, que desatienden los factores de contextualización y la intuición de los conceptos en la enseñanza de las matemáticas. Pensamos que este tipo de planteamiento en la enseñanza nos conduce, en el nivel universitario, a la formación de titulados que en definitiva desarrollan una escasa capacidad argumentativa y crítica, y con poca creatividad, puesto que en realidad no han llegado a comprender y contextualizar los conocimientos adquiridos en la universidad.

Referencias

- CORRAL, A. (1995). Más allá del pensamiento lógico-formal en la enseñanza de las matemáticas. *Tarbiya*, 10, 65-75.
- CLEMENT, J., BROWN, D.E. y ZIETSMAN, A. (1989). Not all preconceptions are misconceptions: finding 'anchoring conceptions' for grounding instructions on students' intuitions. *Int. J. Sci. Educ.* 11, 554-565.
- DUSCHL, R.A. (1995). Más allá del conocimiento: los desafíos epistemológicos y sociales de la enseñanza mediante el cambio conceptual. *Enseñanza de las ciencias*, 13(1), 3-14.
- GIL, D., CARRASCOSA, J., FURIÓ, C. y MARTÍNEZ TORREGROSA, J. (1991). La enseñanza de las ciencias en la educación secundaria. *Cuadernos de educación, ICE/Horsori*.
- HEWSON, P.W. y BEETH, M.E. (1995). Enseñanza para un cambio conceptual: ejemplos de fuerza y de movimiento. *Enseñanza de las ciencias*, 13(1), 25-35.

- MARTÍ, E. (1996). Comprensión matemática: forma y significado. *Aula de innovación educativa*, 48, 70-75.
- SÁENZ DE CASTRO, C. (1995). La enseñanza de las matemáticas. Un problema pendiente. *Tarbiya*, 10, 41-53.
- SÁNCHEZ PÉREZ, E.A., GARCÍA RAFFI, L.M. y SÁNCHEZ PÉREZ, J.V. (1999). Introducción de las técnicas de modelización para el estudio de la física y las matemáticas en los primeros cursos de las carreras técnicas. Aparecerá publicado en los próximos meses en *Enseñanza de las ciencias*.

Apéndice

Las siguientes preguntas constituyen el test de *preguntas básicas* al que hemos hecho referencia. Los contenidos del test de *preguntas avanzadas*, de los que ya hemos hecho una descripción en el texto, son más específicos de las asignaturas impartidas, y por lo tanto nos parece de menor interés presentar todas las preguntas (para más información sobre este particular, véase Sánchez y col. (1999)).

- 1) La densidad de la plancha de la figura es igual a 2 unidades en la parte sombreada e igual a 1 unidad en la parte no sombreada. Situar aproximadamente el centro de gravedad.



- 2) El gasto en la producción en la planta 1, que llamamos x_1 , es el triple que ese gasto en la planta 2, que llamamos x_2 . La ecuación que representa esta relación es:

- Respuesta: 1) $3x_1 = x_2$
 2) $x_1 = 3x_2$
 3) $x_1 = x_2$

- 3) Dar una solución particular del sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{\pi}x + y + z = 0 \\ y + x + e^{\pi}z = 0 \end{cases}$$

Respuesta: (escribe la solución aquí).....

- 4) Consideremos un cubo de lado l y de volumen V . ¿Cuál es el volumen de un cubo de

lado $\frac{l}{2}$? Respuesta: 1) $\frac{V}{2}$ 2) $\frac{V}{6}$ 3) $\frac{V}{8}$

Resumen

En este artículo presentamos algunas conclusiones sobre la influencia de los errores conceptuales en la enseñanza de las matemáticas en la universidad. En particular, estudiamos este problema en el primer curso de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Valencia. Utilizamos un sencillo test como herramienta para añadir algunos datos objetivos a nuestras impresiones previas sobre este problema.

Palabras clave: errores conceptuales, matemáticas, universidad.

Abstract

In this paper we present our conclusions about the influence of the conceptual errors in the teaching of mathematics in the University. In particular, we study this problem in the first course of the Civil Engineering School of the Politechnical University of Valencia (Spain). We use a simple test as a tool in order to add objective data to our previous observations.

Key words: conceptual errors, mathematics, university.

E. A. Sánchez Pérez*

L. M. García Raffi*

J.V. Sánchez Pérez**

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de
Caminos, Canales y Puertos

*Dpto. de Matemática Aplicada

**Dpto. de Física Aplicada

Universitat Politecnica de Valencia

C/ Camino de Vera, s/n

46071 Valencia