Un procedimiento más sencillo que el habitual para demostrar las fórmulas de las derivadas de un producto y de un cociente

Ricardo Moreno Castillo

Introducción

Los estudiantes de bachillerato encuentran extremadamente artificiosas las demostraciones tradicionales de las fórmulas de la derivada de un producto y de un cociente. En ambas hay que sumar y restar una misma cosa, y cuando se explican en clase siempre surge la pregunta por parte de algún alumno: ¿Y cómo se acuerda uno de cual es la cosa que se ha de sumar y restar?

Algunos textos evitan esta dificultad transformando, mediante logaritmos, al producto en suma y al cociente en diferencia. Esto tiene el inconveniente de presentar las derivadas del producto y del cociente como corolarios de la regla de la cadena y de la derivada logarítmica. Si se trata de no ser artificiosos, no parece que hayamos adelantado gran cosa.

En este artículo propongo un procedimiento para llegar a estas fórmulas, más natural que los que habitualmente aparecen en los

Las demostraciones de las fórmulas de la derivada de un producto y de un cociente han sido tradicionalmente una de las muchas operaciones arduas que han tenido que realizar nuestros escolares de bachillerato. Ello se ha debido tanto a su complejidad intrínseca como a la artificiosidad con la que aparecían desarrolladas en algunos libros de texto.

libros de texto. Hablar de una demostración más natural frente a otra más artificial puede sonar raro en los oídos de un profano, pero los aficionados a las matemáticas sabemos muy bien lo que queremos decir. Y también sabemos que, de entre todas las demostraciones posibles, la más natural es la más bonita, la más agradable de explicar y la más fácil de memorizar.

La derivada de un producto

Suponemos que ya han sido explicadas las fórmulas de las derivadas de la suma, de la diferencia, y del producto de una constante por una función. Demostraremos ahora la de la derivada del cuadrado de una función:

$$\left([f(x)]^2\right)' = 2f(x)f'(x)$$

No hay que sumar ni restar nada, tan sólo aplicar la célebre fórmula de la diferencia de cuadrados:

$$\left([f(x)]^2\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)]^2 - [f(x)]^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)+f(x)]\,[f(x+h)-f(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} [f(x+h)+f(x)] \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= 2f(x)f'(x)$$

Para llegar a la derivada de un producto de dos funciones, partimos de la regla del cuadrado de una suma:

$$[f(x)+g(x)]^2 = [f(x)]^2 + [g(x)]^2 + 2f(x)g(x)$$

Derivamos en ambos miembros y resulta lo siguiente:

$$2[f(x)+g(x)]\,[f'(x)+g'(x)] =$$

$$2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) + 2[f(x)g(x)]'$$

Dividimos todo por dos y efectuamos el producto del primer miembro:

$$f(x)f'(x) + g(x)f'(x) + f(x)g'(x) + g(x)g'(x) =$$

$$f(x)f'(x) + g(x)g'(x) + [f(x)g(x)]'$$

Eliminamos el primero y cuarto sumandos del primer miembro con los dos primeros del segundo y ya tenemos la fórmula buscada.

La derivada de un cociente

La derivada de un cociente se deduce fácilmente de la del producto. Derivamos los dos miembros en la igualdad:

$$\frac{f(x)}{g(x)}\, g(x) = f(x)$$

y tenemos que:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' g(x) + \frac{f(x)}{g(x)}\, g'(x) = f'(x)$$

Pasamos al segundo miembro el segundo sumando del primero, dividimos todo por g(x), y ya estamos donde queríamos llegar:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Alguna otra aplicación de la derivada de un cuadrado

Ha sido posible llegar a la derivada de un producto y de un cociente de un modo puramente algebraico gracias a que comenzamos por la derivada del cuadrado de una función. Pero disponer de esta fórmula tiene otras ventajas. Una de ellas es que desde el primer momento, y antes de llegar a la regla de la cadena (de la cual es un caso particular), se puede calcular la ecuación de la recta tangente a una cónica. Del mismo modo puede ser utilizada al estudiar las derivadas de las funciones trigonométricas. Si derivamos en los dos términos de la fórmula fundamental de la trigonometría, llegamos a la siguiente expresión:

$$2(\operatorname{sen}x)(\operatorname{sen}x)'+2(\cos x)(\cos x)'=0$$

que permite despejar la derivada de una de las dos funciones en cuanto se conoce la otra.

También la derivada de la raíz cuadrada de una función (otro caso particular importante de la regla de la cadena) se puede demostrar sin más herramienta que la derivada del cuadrado. Partimos de la obviedad:

$$\left[\sqrt{f(x)}\right]^2 = f(x)$$

y derivamos en ambos miembros:

$$2\sqrt{f(x)}\left[\sqrt{f(x)}\right]' = f'(x)$$

Despejamos la derivada, y ya llegamos a donde queríamos:

$$\left[\sqrt{f(x)}\right]' = \frac{f(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Resumen

En este artículo proponemos un método para demostrar algunos teoremas del cálculo de derivadas más fácil que el que suele aparecer en los libros de texto.

Palabra clave: derivadas, producto, cociente.

Abstract

In this article, we propose a method to demonstrate some of the derivatives calculation theorems simplier than those which usually appear in the textbooks.

Key words: derivatives, product, quotient.

Ricardo Moreno Castillo
Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
28040 Madrid