

## Algoritmos flexibles para las operaciones básicas como modo de favorecer la inclusión social

### Flexible algorithms for basic operations as a way to encourage social inclusion

### Algoritmos flexíveis para as operações básicas como forma de favorecer a inclusão social

Natividad Adamuz-Povedano  
Rafael Bracho-López  
Universidad de Córdoba

La diversidad que se presenta hoy en día en el aula requiere soluciones que nos ayuden a mejorar la atención a nuestro alumnado. Necesitamos metodologías que favorezcan la igualdad de oportunidades de éxito personal dentro de esa diferencia. Centrándonos en nuestro campo de trabajo, el fracaso en las matemáticas en los primeros años de aprendizaje puede dejar huellas imborrables en la persona. Por eso, entendemos como algo crucial empezar a utilizar metodologías más integradoras que no etiqueten al alumnado como “válidos” o “no válidos” para las matemáticas. En este trabajo se presenta una metodología que se apoya en los denominados algoritmos abiertos basados en números (ABN) como una alternativa integradora, basada en el aprendizaje significativo del sistema de numeración decimal y el dominio comprensivo de las operaciones y de sus propiedades. Se analiza el grado de desempeño de competencias numéricas de un grupo de estudiantes que siguió dicha metodología en el primer ciclo de educación primaria, encontrándose diferencias en todos los aspectos de la matemática formal e informal; numeración, comparación, convencionalismos, conceptualización, cálculo formal, cálculo informal y hechos numéricos. Aunque no en todos los casos estas diferencias llegan a ser significativas estadísticamente.

**Descriptores:** Algoritmos ABN, Matemáticas en la educación primaria, Inclusión social, Atención a la diversidad.

In our classrooms there is high diversity that requires solutions to help us to attend to our students. We need methodologies that promote equal opportunities for personal success inside the difference. Focusing on our field, the failure of mathematics in the early years of learning can leave indelible marks on the person. So, we understand how important is to start using integrated methodologies which not label to student as "able" or "not able" for mathematics. In this study we show a methodology based in the use of an open calculation based on numbers (ABN) as an inclusive alternative, it is based on the meaningful learning of the decimal system and on the comprehensive mastery of the operations and their properties. We analyse the level of development of numerical skills of a group of students who followed this methodology in the first stage of primary education, finding differences in all aspects of formal and informal mathematics; numbers, comparison, conventions, conceptualization, formal calculus, numerical calculation and numerical facts. But not all cases these differences become statistically significant.

**Keywords:** ABN algorithm, Elementary school mathematics, Social inclusion, Student diversity.

A diversidade que se apresenta hoje na sala de aula requer soluções que nos ajudem a melhorar a atenção a nosso alunado. Precisamos metodologias que favoreçam a igualdade de oportunidades de êxito pessoal dentro dessa diferença. Centrando-nos em nosso campo de trabalho, o fracasso nas matemáticas nos primeiros anos de aprendizagem pode deixar marcas inesquecíveis na pessoa. Por isso, entendemos como algo crucial começar a utilizar metodologias mais integradoras que não etiquetem o alunado como "válidos" o "não válidos" para las Matemáticas. Neste trabalho, apresenta-se uma metodologia que se apóia nos denominados algoritmos abertos baseados em números (ABN) como uma alternativa integradora, baseada na aprendizagem significativa do sistema de numeração decimal e o domínio compreensivo das operações e de suas propriedades. Analisa-se o grau de desempenho de competências numéricas de um grupo de estudantes que seguiu tal metodologia no primeiro ciclo de educação primária, encontrando-se diferenças em todos os aspectos da matemática formal e informal; numeração, comparação, convencionalismos, conceitualização, cálculo formal, cálculo informal e feitos numéricos, ainda que não seja em todos os casos que estas diferenças cheguem a ser estatisticamente significativas.

**Palavras-chave:** Algoritmos ABN, Matemáticas no ensino fundamental, Inclusão social, Atenção à diversidade.

## **Introducción**

Una de las principales preocupaciones de las sociedades desarrolladas es la eficiencia de sus sistemas educativos. No en vano, un modelo educativo que dote a las personas de los conocimientos, habilidades y valores necesarios para tomar un papel activo en el seno de la sociedad globalizada e intercultural, característica del siglo XXI, se convierte en una garantía para la igualdad de oportunidades y para el desarrollo democrático, científico y económico.

Las administraciones educativas y los centros educativos, desde sus respectivas responsabilidades, son sin duda agentes claves en la mejora de los modelos educativos. Así son frecuentes en la actualidad las investigaciones prioritarias en el ámbito educativo y los programas de mejora que se vienen implementando, en los que prima la importancia de conseguir modelos educativos que favorezcan el éxito escolar y ayuden a la cohesión social. Un ejemplo que ilustra esta tendencia en Andalucía es la cobertura ofrecida por la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía a las Comunidades de

Aprendizaje, con la implantación de la Red Andaluza de Comunidades de Aprendizaje (Junta de Andalucía, 2012)

Desde la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Córdoba, un grupo de profesores y profesoras vinculadas a los departamentos de Educación y de Matemáticas, convencidos del importante papel que desempeña la Universidad en este proceso como vehículo del saber científico y como responsable de la formación inicial del profesorado, creó el Aula de Mejora Educativa, con la finalidad de responder a las demandas de los centros educativos para el asesoramiento y formación en la implementación de programas de mejora escolar. En este marco surge en el curso 2012-2013 un proyecto de intervención didáctica en el área de Matemática en un colegio público de Córdoba ubicado en un barrio de nivel socio-económico medio-bajo y con un considerable porcentaje de alumnado procedente de distintas culturas, cuyo objetivo fue afrontar el aprendizaje del sistema de numeración decimal y las operaciones aritméticas básicas de manera significativa e integradora. El presente trabajo ha sido un primer acercamiento, necesario para la puesta en marcha de ese proceso de innovación educativa que, con el mismo objetivo general, se está empezando a desarrollar actualmente en tres colegios públicos de Córdoba ubicados en zonas de alto riesgo de exclusión social.

## **1. Fundamentación teórica**

El fin que debe pretender la educación primaria es el de dotar a la persona con los conocimientos, habilidades, actitudes y valores necesarios para tomar un papel activo dentro de una sociedad intercultural puesto que cualquier ciudad de hoy en día es un microcosmos en el sentido de que en un mismo espacio habitan personas de diferentes etnias, nacionalidades, ideologías y estatus social. Indudablemente, para conseguir este objetivo es necesario conectar el mundo escolar con las necesidades de la sociedad, lo que hace necesaria una permanente adaptación de nuestro sistema educativo.

La interculturalidad representa un modo de ser, de habitar la ciudad y de establecer compromisos con ella. En este sentido Zapata-Barrero (2001) entiende que “ser ciudadano es habitar la diferencia y abrirse a las fuentes de la creatividad y al proyecto ético de la otredad” (p. 20), de donde se puede extraer un nuevo concepto de ciudadanía marcado por la inclusión y por ofrecer una igualdad diferenciada (Arnaiz y De Haro, 2004).

Como apuntan Escudero y Martínez (2011) la cuestión fundamental a tratar sobre la inclusión sería ver qué políticas, sistemas escolares, centros, currículo, enseñanza, docentes y otros profesionales se precisan, con qué convicciones, capacidades y compromisos, para que no haya nadie que quede excluido. Sería necesario revisar el currículo y el funcionamiento de los centros, pero para llegar a cambios mayores se necesita partir de cambios a nivel más bajo, en el aula, y este es el contexto de nuestra investigación. Podemos preguntarnos qué implicaciones tiene esta diversidad en la enseñanza de las matemáticas, puesto que nuestro objetivo es el aprendizaje de las matemáticas como herramienta fundamental para seguir avanzando en otros aprendizajes necesarios para formar una ciudadanía activa en nuestra sociedad.

Desde este punto de vista, es necesario un cambio en el tratamiento de las matemáticas en la educación primaria. En los primeros años de aprendizaje, en los que nos centramos en este trabajo, este cambio debe sustentarse en dos ejes: por un lado en el uso de

materiales manipulativos, ya que en ese momento la experiencia física desempeña un papel crucial en el desarrollo global y especialmente en el desarrollo lógico-matemático (Lerner, 1999), y por otro lado, en la forma de abordar las reglas de cálculo, puesto que los algoritmos tradicionales son insensibles a objetivos particulares o trayectorias personalizadas (Gallego-Espejo, 2013). El aprendizaje del cálculo debe entenderse desde una perspectiva integral, teniendo en cuenta factores cognitivos, emocionales y sociales, y desvinculándolo de la eficacia competitiva. Los resultados deben preocuparnos, por supuesto, pero creemos que es más importante centrarse en los procesos y en cómo estos repercuten en la calidad de vida escolar, sobre todo, cuando se trabaja con colectivos en riesgo de exclusión social.

Tradicionalmente, la asignatura de matemáticas se ha concebido en la escuela como una asignatura asequible solo para el alumnado aventajado. En algunos casos hasta se ha utilizado como medida de inteligencia de los estudiantes. Sin embargo, las matemáticas son potencialmente asequibles, imprescindibles para la vida y necesarias para el desarrollo intelectual e integral del alumnado. Hay personas que no han asistido a la escuela nunca pero han sido capaces de desarrollar herramientas de cálculo necesarias para su completo desarrollo en la vida, aunque en la mayoría de estos casos no haya habido aprendizaje intencionado, sino natural, es decir, se ha adquirido unos conocimientos matemáticos necesarios para una actividad profesional, por ejemplo, y sin embargo, no hay consciencia de que haya habido aprendizaje matemático (Orrantía, 2006). Por tanto, si bien la persona nace con una dotación matemática, el desarrollo de la competencia matemática, entendida como capacidad individual para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas, y satisfacer las necesidades de la vida personal como “ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo” (OECD, 2003:3; OECD, 2004:24), dependerá en buena parte de esos aprendizajes informales de “la calle”, pero sin duda resulta fundamental que ese conocimiento matemático se vea complementado con la aplicación de enfoques metodológicos en las escuelas (Martínez, 2010).

En efecto, la competencia matemática no es algo inherente a la persona, sino que se va adquiriendo en función de las capacidades desarrolladas desde la infancia, por eso es tan importante que se realicen estimulaciones matemáticas desde edades tempranas (Castro, 2006), utilizando herramientas y materiales acordes a la edad cognitiva del alumnado, para su correcto desarrollo, pero sobre todo para despertar la curiosidad e interés que todos los niños y niñas tienen por descubrir todo lo que les rodea. Estas primeras experiencias de acercamiento de los niños y niñas al mundo de las matemáticas pueden resultar determinantes puesto que suelen ir asociadas con aspectos emocionales que generan actitudes tanto positivas como negativas hacia las matemáticas, en el contexto escolar pero también a nivel social y personal (Bracho-López, Maz-Machado, Jiménez-Fanjul y García-Pérez, 2011).

Rivière (1990), sostiene que

*Muchos-demasiados estudiantes encuentran grandes dificultades para alcanzar los objetivos educativos establecidos en los currícula, y estas dificultades se extreman en un grupo más reducido de alumnos, para los que las matemáticas se convierten en una verdadera pesadilla (p.2).*

En general, el profesorado siente gran preocupación por las dificultades que se le plantean a sus alumnos y alumnas en el aprendizaje matemático, pero por ejemplo, en lo

relativo al uso de las operaciones aritméticas básicas, la realidad es que la mayoría de estos niños y niñas no tienen ningún problema cuando van a comprar sus caramelos preferidos, saben perfectamente para cuántos caramelos tienen con el dinero que llevan, al igual que en los juegos del patio del colegio pueden llevar la cuenta de las canicas que ganan o pierden. Esto debería sugerirnos que el problema está en la forma en la que enseñamos a nuestro alumnado a hacer esas cuentas en la escuela.

Los niños y niñas pasan una cantidad ingente de horas en la escuela (y en muchos casos en la casa también) practicando unos procedimientos mecánicos de los que no entienden el porqué y el para qué. Ginsburg y Baroody (2007) nos argumentan de un modo muy convincente porqué tiene más sentido dedicar nuestro tiempo en la escuela a enseñar a los niños y niñas a entender las matemáticas más que a aprender procedimientos mecánicos:

- El aprendizaje significativo facilita las tareas de memorización de conceptos, definiciones, procedimientos, fórmulas, etc., ya que se reduce una gran cantidad de práctica para dominarlos.
- Es más fácil recordar las habilidades matemáticas que se han comprendido que las que se han aprendido de memoria.
- Si se olvida parte de la habilidad o contenido, es más fácil reconstruir el conocimiento que se adquirió de manera significativa.
- Es más probable que los alumnos y alumnas apliquen correctamente las habilidades adquiridas de forma significativa.
- El enfoque significativo del aprendizaje facilita la adquisición de nuevos conceptos o habilidades y la resolución de nuevos problemas que se puedan plantear.
- Los niños y niñas se sienten menos inhibidos y más comprometidos con su aprendizaje cuando este tiene sentido para ellos.

Los algoritmos que hoy en día se enseñan en la escuela son producto histórico de una tecnología específica: el lápiz y el papel o la tiza y la pizarra. Cuando se calculaba sobre arena o ceniza, los cálculos eran distintos. Hace más de cuarenta años Ablewhite (1971) ya advertía de los problemas que se derivaban de un aprendizaje inadecuado de las operaciones básicas. En los años ochenta, cuando empezaron a irrumpir las calculadoras en la escuela, se planteaba el debate sobre la pertinencia de la enseñanza de los algoritmos de cálculo tradicionales. A modo de ejemplo, Maier (1987), afirmaba que el uso de las cuatro reglas de cálculo en la escuela era solo una cuestión de supervivencia escolar, es decir, se aprenden para tener éxito en la escuela, y desde entonces han sido muchos los autores que nos han hablado del poco sentido pedagógico que tienen los algoritmos tradicionales hoy día y de los problemas derivados de su enseñanza (Baroody, 1988; Chamorro, 2005; Dickson, Brown y Gibson, 1991; Gómez, 1999; Martínez, 2011; Maza, 1989; NCTM, 2000), entre otros muchos; sin embargo en la mayoría de las escuelas se siguen enseñando las cuatro operaciones básicas de forma tradicional.

En la enseñanza tradicional los niños y niñas se enfrentan a los algoritmos a muy temprana edad. En España, con seis años aprenden sus primeras sumas usando el algoritmo y con ocho años afrontan las primeras multiplicaciones. Muchas de las razones en contra del empleo de las cuentas se pueden relacionar con este hecho. Los

algoritmos son procedimientos para optimizar tiempo y esfuerzos. Los niños y niñas no conocen los conceptos subyacentes por lo que pierden el sentido de lo que están haciendo (Martínez, 2000). Esta “no comprensión” conlleva en multitud de casos efectos negativos, como la adquisición de una concepción errónea del funcionamiento de las matemáticas o el menosprecio de las capacidades matemáticas propias (Gómez, 1998).

Según Martínez (2010) en la escuela no se enseña a calcular, sino que se enseñan cuentas, es decir, no se desarrollan destrezas innatas de cálculo, sino que se aprenden instrucciones de memoria para hacer cálculos. Además, no se trabaja con números sino con cifras, porque la dinámica de los algoritmos obliga a desgajar todas las cifras que contiene el número y a todas se le aplica el mismo tratamiento, sin que importe si son unidades, decenas o centenas. Esto conlleva un gran problema a la hora de aplicar estos aprendizajes: los niños y niñas son capaces de hacer complicadas multiplicaciones pero no son capaces de resolver problemas de sumas. Esto es totalmente lógico si se reconoce que el aprendizaje de los algoritmos no implica que los niños y niñas entiendan o interioricen los conceptos de suma, resta, multiplicación o división.

Ante esta realidad, tanto los referentes universales sobre educación matemática como los marcos normativos actuales de los países desarrollados, inciden en la importancia de fomentar en los escolares el desarrollo del denominado “sentido numérico”, entendido este como un concepto amplio que hace referencia al desarrollo de capacidades tan importantes como el cálculo mental flexible, la estimación numérica y el razonamiento cuantitativo, entre otras (Greeno, 2001), todo ello con un enfoque orientado hacia el desarrollo de la competencia matemática (García et al., 2011). Creemos, por tanto, que se hace necesario un cambio metodológico en esta dirección. De hecho, cada vez más el profesorado y los centros buscan alternativas a los algoritmos tradicionales, y se orientan hacia metodologías que comparten características comunes (Bracho-López, 2013), como que:

- Se basan en un conocimiento profundo del sistema de numeración decimal.
- En todo momento se trabaja con números y no con cifras.
- Se utilizan constantemente las propiedades de las operaciones.
- Los cálculos se realizan de forma variada por lo que permiten adaptarse a la diversidad del alumnado.
- Los cálculos toman su sentido a partir de situaciones problemáticas.

De entre todas las opciones que hemos encontrado nos hemos decantado por los algoritmos abiertos basados en números (ABN), creados por Jaime Martínez Montero (Martínez, 2008). El nombre de los algoritmos describe las principales características de los mismos:

- A de Abiertos, porque no hay una forma única de realizarlos, cada alumno o alumna puede trabajar de forma distinta, en función de su desarrollo, dominio de cálculo, estrategias de cálculo, o simple capricho. Esta característica se contrapone a los algoritmos tradicionales que son cerrados, en el sentido que hay solo una forma de hacerlos.
- BN de Basados en Números, en contraposición a los algoritmos tradicionales que están basados en cifras, el algoritmo ABN siempre trabaja con números,

que podrán ser más grandes o más pequeños, pero siempre combinan números completos con todo su significado y no cifras a las que se trata de igual manera sin tener en cuenta sus valores posicionales, lo que hace que se pierda el verdadero sentido numérico del proceso.

Los algoritmos ABN son transparentes ya que no ocultan cálculos ni procesos intermedios: en cada momento, se tiene conciencia y conocimiento de lo que se está haciendo. Esto no sucede con los algoritmos tradicionales de la multiplicación y la división ya que en ellos, no se tiene ninguna información hasta que no se completa el proceso.

Este método procede de las actuaciones llevadas a cabo inicialmente en Holanda y más tarde en otros países del entorno europeo con el fin de renovar la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en general y del cálculo en particular, en una línea denominada “matemáticas realistas” orientada hacia el desarrollo de la competencia matemática, en la que se persigue el fomento del razonamiento matemático a través de instrumentos manipulativos y estimulantes para el alumnado con el propósito de aumentar la motivación y la atención (Heuvel-Panhuizen, 2000).

A continuación resumimos a modo de ejemplo cómo se realizan una de las operaciones básicas con el método ABN, para proporcionar un entendimiento más profundo del algoritmo.

La esencia de la suma o adición está en acumular un sumando en el otro. Una vez que esté totalmente acumulado, el nuevo sumando nos dará el resultado. Para la realización de estos cálculos los alumnos completan tres columnas (tabla 1), en una de ellas se colocan las cantidades que se van moviendo y en las otras dos se colocan cómo quedan los sumandos tras esta modificación:

Tabla 1. Algoritmo ABN para la suma

	<b>247+369</b>	
Muevo	369	247
100	469	147
1	470	146
100	570	46
30	600	16
16	616	0

Fuente: Elaboración propia.

No hay una forma única de hacer los cálculos, esto le permite a cada discente avanzar a su propio ritmo. Finalmente, empleando la cantidad de pasos que más se adapte a cada uno, todos llegan al resultado con menos posibilidades de error, lo que hace que la motivación sea mucho mayor (Martínez, 2011).

## 2. Método

El objetivo de la investigación es analizar el grado de desarrollo del sentido numérico alcanzado por niños y niñas al final de segundo ciclo de educación primaria tras la utilización de la metodología basada en los denominados algoritmos ABN, prestando especial atención a los resultados obtenidos para los diferentes ritmos de aprendizaje.

A partir de este objetivo, la hipótesis de trabajo es que la utilización de la metodología basada en el uso de algoritmos ABN en los primeros años de aprendizaje matemático

mejora significativamente el grado de desarrollo del sentido numérico en general, adaptándose de manera flexible y satisfactoria a la diversidad del alumnado.

El análisis e interpretación de los datos se ha basado en la realización del test de competencia matemática, desarrollado por Ginsburg y Baroody en el año 2003 y adaptado al medio español por Núñez y Lozano en el año 2007, (TEMA-3, por sus siglas en inglés). El test se fundamenta en resultados de investigaciones en el ámbito del desarrollo aritmético infantil. Está diseñado para evaluar a niños y niñas en edades comprendidas entre los 3 años y 0 meses y los 8 años y 11 meses. TEMA-3 se compone de 72 ítems, de los cuales la mayoría han surgido de estudios realizados por los autores y otros investigadores para examinar el conocimiento, tanto informal como formal, que van adquiriendo los niños y niñas. Es un test validado a nivel internacional, el cual se aplica de manera individualizada y cuyo objetivo es evaluar el desarrollo del pensamiento matemático temprano y detectar las dificultades de aprendizaje del alumnado facilitando el diagnóstico y el tratamiento de las mismas.

En 41 ítems se abordan cuatro aspectos fundamentales de las matemáticas informales:

- Numeración: dominio de la secuencia numérica mediante tareas de conteo y enumeración (23 ítem).
- Magnitud relativa: comparar cantidades, establecer distancias relativas entre números (6 ítems).
- Cálculo informal en situaciones de suma y resta (con objetos o mentalmente) (8 ítems)
- Conceptos básicos: regla de la cardinalidad y estrategias de conteo y reparto de objetos (4 ítems).

En 31 ítems se abordan cuatro aspectos de las matemáticas formales:

- Conocimientos de los convencionalismos de lectoescritura de cantidades (8 ítems).
- Dominio de hechos numéricos (9 ítems).
- Cálculo formal (9 ítems).
- Conceptos básicos del sistema de numeración decimal (5 ítems)

La aplicación de TEMA-3 nos ofrece resultados en cinco tipos de puntuaciones: puntuación directa, que nos da el número de ítems resueltos de forma correcta; índice de competencia matemática, que nos indica el rendimiento global del alumnado en relación a su grupo de referencia (la media es 100 y la desviación típica 15, tabla 2) percentil, edad y curso equivalente. Cada una de estas puntuaciones nos proporciona información sobre la ejecución del alumno o alumna (Ginsburg y Baroody, 2007).

La muestra está formada por sendos grupos de estudiantes de educación primaria de dos colegios de la provincia de Córdoba. Ambos centros tienen características parecidas y pertenecen a entornos socioeconómicos medio-bajos, su elección ha sido intencionada y por conveniencia, restringiendo la elección de estos grupos de estudiantes por la disponibilidad que han mostrado ambos centros. El alumnado de uno de los centros siguió durante el primer ciclo de educación primaria (incluye primer y segundo curso) la metodología basada en los algoritmos ABN, mientras que el alumnado del otro colegio



utilizó los algoritmos de cálculo tradicionales, por lo que el primer grupo ha sido considerado grupo experimental y el segundo grupo de control. Cada grupo ha estado formado por 26 alumnos y alumnas, pero en el grupo experimental se encontraron seis niños y niñas diagnosticados con necesidades específicas de apoyo educativo (NEAE), mientras que en el grupo de control no había ningún caso, por lo que se optó por no incluir al alumnado de estas características en el estudio comparativo general, si bien sí se estudiaron esos casos por separado.

Tabla 2. Guía para interpretar el Índice de Competencia Matemática (TEMA-3)

ÍNDICE DE COMPETENCIA MATEMÁTICA	DESCRIPTOR
>130	Muy superior
121-130	Superior
111-120	Por encima de la media
90-110	Medio
80-89	Por debajo de la media
70-79	Pobre
<70	Muy pobre

Fuente: Elaboración propia.

El test se aplicó de forma individual siguiendo las indicaciones del manual, respetando el ritmo y horario de los centros. Se llevó a cabo al final del ciclo, es decir, al final del segundo curso de educación primaria. El tiempo medio empleado en aplicar el test es de 30-40 minutos por niña o niño.

Entendemos que la muestra puede no ser suficientemente representativa, por lo que los resultados no pretenden ser extrapolables, de modo que esta investigación constituye solo un primer acercamiento a la realidad a través del análisis de unas situaciones concretas.

### 3. Resultados

#### 3.1. Estudio comparativo global

En la tabla 3 se ofrecen los rangos, las medias y las desviaciones típicas de las puntuaciones estándar de los Índices de Competencia Matemática:

Tabla 3. Estadísticos descriptivos del Índice de Competencia Matemática en ambos centros

	N	MÍNIMO	MÁXIMO	MEDIA	DESVIACIÓN TÍPICA
<b>Grupo Experimental</b>					
Índice de competencia matemática (ICM)	20	75	137	<b>111,25</b>	17,559
<b>Grupo de Control</b>					
Índice de competencia matemática (ICM)	26	64	116	<b>96,08</b>	16,287

Fuente: Elaboración propia.

Como puede observarse a primera vista, la media del ICM del grupo experimental es bastante superior; no obstante, debemos comprobar si dicha diferencia es significativa. Por otro lado, se aprecia una dispersión considerable, lo que es indicativo de una gran diversidad entre el alumnado de ambos grupos a pesar de haber excluido en esta comparación al alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo.

Al aplicar la prueba de Kolmogorov-Asimov a los datos del ICM de los dos colegios se comprobó que en ambos casos existía aproximación a la distribución normal, por lo que tiene sentido aplicar la prueba paramétrica de T de Student. La hipótesis nula,  $H_0$ , sería que no tenemos evidencias de que las diferencias entra las medias del ICM sean significativas, mientras que la  $H_1$  sería que habría evidencias de que sí lo son.

El resultado de la prueba T de Student (0,004) es menor que la significación que asumimos para el estudio (0,05), por lo que aceptamos la hipótesis alternativa ( $H_1$ ), es decir, tenemos evidencias de que hay diferencias significativas entre las medias del ICM de ambos centros.

Si nos centramos en la interpretación del ICM por niveles, obtenemos los siguientes resultados (tabla 4).

Tabla 4. Datos del Índice de Competencia Matemática por niveles

	GRUPO EXPERIMENTAL		GRUPO DE CONTROL	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
Muy superior > 130	2	10%	0	0%
Superior [121, 130]	7	35%	0	0%
Por encima [111, 120)	1	5%	6	23,1%
Medio [90, 110)	8	40%	12	46,2%
Por debajo [81, 90)	1	5%	3	11,5%
Pobre [70, 80)	1	5%	2	7,7%
Muy pobre < 70	0	0%	3	11,5%
Total	20	100,0	26	100,0

Fuente: Elaboración propia.

Observamos que los mayores porcentajes de alumnos en uno y otro caso (40% y 46,2% respectivamente) obtienen un ICM medio, que podemos considerar adecuado a su edad. Sin embargo, en el caso del grupo de control, el 30,7% tiene valores inferiores y el 23,1% superiores, mientras que en el experimental, tan solo encontramos a 2 alumnos con niveles inferiores a los considerados medios y la mitad del grupo obtienen niveles superiores a estos. También llama la atención el hecho de que el 45% del alumnado del grupo que siguió la metodología ABN obtuvo niveles de competencia matemática superiores o muy superiores, mientras que ningún niño o niña del grupo de control consiguió alcanzar estos valores.

Más allá de los aspectos generales analizados hasta ahora, nos parece interesante ofrecer información acerca del nivel de desarrollo específico en lo referente a los aspectos fundamentales de la matemática formal e informal. En la tabla 5 se presentan los aspectos concretos que hemos estudiado dentro de estos dos grandes apartados, con indicación de los ítems dedicados a cada uno de ellos:

Tabla 5. Aspectos analizados en el estudio realizado

MATEMÁTICA INFORMAL		MATEMÁTICA FORMAL	
Numeración	23 ítems	Convencionalismo	8 ítems
Comparación	6 ítems	Hechos numéricos	9 ítems
Cálculo informal	8 ítems	Cálculo formal	9 ítems
Conceptos informales	4 ítems	Conceptos formales	5 ítems
Total: 72 ítems			

Fuente: Elaboración propia.

Al analizar los ítems correspondientes a cada uno de estos aspectos se observaron diferencias considerables entre los dos grupos de escolares. Al aplicarle la prueba de

Kolmogorov-Smirnov a cada una de estas variables obtuvimos que ninguna de las relativas a la matemática informal se ajustaban a la distribución normal, mientras que entre las de matemática formal, si se ajustaban los hechos numéricos y el cálculo formal y no lo hacían los convencionalismos y los conceptos formales. Por ello, se optó por aplicar la prueba paramétrica T de Student en los dos casos que había ajuste, y en el resto de variables se aplicó la no paramétrica U de Mann-Whitney, observándose diferencias significativas entre las medias de numeración, cálculo informal, convencionalismos y conceptos formales, pero no en el resto de variables.

Centrándonos en los datos relativos a cálculo informal (tabla 6), componente formada por la resolución correcta de ítems relacionados con sumas y restas mentales, tanto verbales (dadas en forma de problema) como no verbales (dos pequeños conjuntos vistos previamente), se obtiene que el 40% del alumnado del grupo experimental responde correctamente a todos los ítems relacionados con esta componente, mientras que tan solo un estudiante del grupo de control consigue hacerlo. En el grupo de control el mayor porcentaje (53,8%) corresponde al de los estudiantes que responden correctamente 5 ítems.

Tabla 6. Ítems respondidos correctamente sobre cálculo informal

	CÁLCULO INFORMAL (8 ÍTEMS)		
	Ítems respondidos correctamente	Nº alumnos/as	Porcentaje (%)
<b>GRUPO EXPERIMENTAL</b>	5	5	25
	6	4	20
	7	3	15
	8	8	40
	Total	20	100
<b>GRUPO CONTROL</b>	4	1	3,8
	5	14	53,8
	6	6	23,1
	7	4	15,4
	8	1	3,8
Total	26	100	

Fuente: Elaboración propia.

Estos resultados parece que dejan entrever que el uso los algoritmos ABN refuerzan los aspectos informales del conocimiento matemático. Por otro lado, el 30% del alumnado del grupo experimental responde correctamente a todos los ítems relacionados con la realización de operaciones de sumas y restas, que evalúan el cálculo formal (tabla 7), mientras que este porcentaje se reduce a un 11,5% en el caso del alumnado del grupo de control. En este colegio el mayor porcentaje de estudiantes (19,2%) tan solo responde correctamente a dos ítems de este apartado.

Destacamos que, en las preguntas que se corresponden con meros cálculos algorítmicos sencillos, no se aprecian grandes diferencias, pero las diferencias de rendimiento son más evidentes en las sumas y restas con llevadas (figura 2) y en los ítems que se corresponden con situaciones problemáticas que conllevan cálculos mentales (figura 3).

Tabla 7. Ítems respondidos correctamente sobre cálculo formal

CÁLCULO FORMAL (9 ÍTEMS)			
	Ítems respondidos correctamente	Nº alumnos/as	Porcentaje (%)
GRUPO EXPERIMENTAL	1	1	5
	2	1	5
	4	2	10
	5	1	5
	6	3	15
	7	2	10
	8	4	20
	9	6	30
	Total	20	100
	GRUPO DE CONTROL	2	5
3		1	3,8
4		3	11,5
5		2	7,7
6		4	15,4
7		4	15,4
8		4	15,4
9		3	11,5
Total		26	100

Fuente: Elaboración propia.

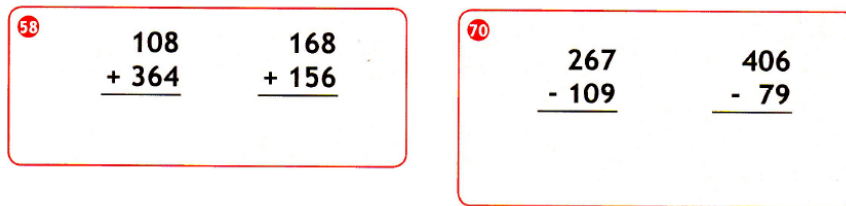


Figura 2. Ítem sobre cálculo formal escrito

Fuente: Elaboración propia.

Ante dichas situaciones se aprecia que los estudiantes que han trabajado el método tradicional se encuentran con dificultades al intentar representar mentalmente las operaciones como una cuenta de lápiz y papel y resolverlo de igual manera, por lo que los resultados que obtenían además de ser más lentos fueron, en la mayoría de los casos, erróneos. En cambio, el alumnado que ha trabajado el cálculo ABN opera directamente de izquierda a derecha haciendo valer la destreza obtenida con la utilización de material manipulativo además de la realización de las operaciones con un sentido numérico desarrollado adecuadamente.

**65. RESTA MENTAL I (Informal).**

Procedimiento: Decir: "TE VOY A DECIR ALGUNOS PROBLEMAS DE RESTA QUE TIENES QUE CALCULAR MENTALMENTE. POR EJEMPLO, ¿CUÁNTAS SON OCHO MANZANAS MENOS CUATRO MANZANAS? PUEDES RESOLVERLO DE LA FORMA QUE QUIERAS".

A. "¿CUÁNTAS SON 17 MANZANAS MENOS 8 MANZANAS?".  
 B. "¿CUÁNTAS SON 18 MANZANAS MENOS 6 MANZANAS?".  
 C. "¿CUÁNTAS SON 16 MANZANAS MENOS 5 MANZANAS?".

Figura 1. Ejemplo de ítem de cálculo mental

Fuente: Elaboración propia.

### 3.2. Análisis de alumnado con necesidades educativas especiales

Como mencionamos en la descripción de la muestra del estudio, el alumnado diagnosticado como de NEAE fue excluido del estudio comparativo general, pero es interesante destacar estos casos por separado, sin compararlos con el grupo de control, puesto que nuestro objetivo es analizar el grado de desarrollo del sentido numérico prestando especial atención a los diferentes ritmos de aprendizaje que se presentan en el aula.

A continuación describimos los casos particulares de este alumnado (tabla 8):

- A.052 es un alumno con capacidad intelectual límite, su coeficiente intelectual (CI) está por debajo de lo considerado como normalidad, es decir, un CI entre 85 y 115, aunque no es un retraso mental, el cual se considera cuando el CI está por debajo de 75.
- A.053 es un alumno con trastornos del espectro autista (TEA).
- A.054 es una alumna que está en estudio en la unidad de salud mental pero todavía no tiene un diagnóstico definitivo.
- A.056 y A.058 pertenecen a sendas familias completamente desestructuradas, con un alto índice de absentismo escolar.
- A.072 es una alumna con dificultades de aprendizaje además de pertenecer a una familia desestructurada.

Tabla 8. Índice de competencia matemática y curso equivalente del alumnado con necesidades educativas específicas

ALUMNADO	ICM	INDICADOR DE ICM	CURSO EQUIVALENTE
A.052	103	Medio	3º
A.053	115	Por encima de la media	4º
A.054	74	Pobre	1º
A.056	82	Por debajo de la media	2º
A.058	71	Pobre	1º
A.072	77	Pobre	1º

Fuente: Elaboración propia.

Es de resaltar especialmente el caso del alumno A.052, porque es un alumno con un coeficiente intelectual bastante bajo, pero que obtuvo un índice de competencia medio. En el análisis pormenorizado de los diferentes ítems se observa que el niño presenta un desarrollo de habilidades informales adecuado, presentando dificultades con el concepto parte-todo, y una ligera desventaja en los aspectos formales, donde se manifiestan dificultades en la realización de cálculo escrito y comprensión de relaciones en el sistema numérico decimal, presentando un buen desarrollo en la lectoescritura de cantidades y el recuerdo de hechos numéricos. En la entrevista que mantuvimos con su tutora nos comentó que el niño respondió a la metodología basada en el uso de algoritmos ABN de una manera espectacular, con una motivación muy superior a la que presenta en las otras áreas.

En el caso del alumno A.053, vemos que su índice de competencia matemática está por encima de la media, lo que refleja un amplio conocimiento del sistema numérico decimal,

por encima de su edad. Además, mantiene un equilibrio entre las habilidades formales e informales. Dadas sus características, se tuvo que poner especial cuidado en la aplicación del test, de forma que esta situación nueva en su actividad diaria en la escuela no fuese algo que influyese de forma negativa en sus resultados.

En el caso de los niños y niñas A.054, A.056, A.058 y A.072, se detecta un índice de competencia más bajo, además de una edad equivalente inferior a su edad cronológica, lo que indica que su nivel de competencia matemática no es adecuado para su edad. Los cuatro casos presentan un desarrollo de habilidades informales adecuado, con gran desventaja en los aspectos formales, donde se manifiestan dificultades en el recuento de hechos numéricos, cálculo escrito y comprensión de relaciones en el sistema numérico decimal.

Los cuatro proceden de una zona de exclusión social, con familias muy desestructuradas, con un nivel alto de desarraigo. En dos de los casos (A.054 y A.072) esta situación se complica con problemas de otra índole (trastornos de la conducta y dificultades de aprendizaje, respectivamente) lo que hace que una actuación de este tipo no sea suficiente para empezar a disminuir el riesgo de exclusión social; son casos en los que sería necesaria una transformación de las relaciones alumno-familia-escuela y en la que deberían estar incluidos otros agentes, tanto dentro como fuera de la escuela.

#### **4. Discusión y conclusiones**

En el análisis conjunto realizado se ha observado que, en general, existen diferencias significativas entre la competencia matemática alcanzada en el grupo de estudiantes que siguieron la metodología basada en los algoritmos ABN y la conseguida en el grupo que siguió la metodología basada en los algoritmos tradicionales. Estas diferencias se han constatado en todos los aspectos de la matemática formal e informal (numeración, comparación, convencionalismo, hechos numéricos y conceptualización y cálculo, tanto formal como informal), si bien solo se pueden considerar estadísticamente significativas en numeración y cálculo, dentro de la categoría de la matemática informal, y en convencionalismos y conceptualización, en el caso de la matemática formal.

Además, por niveles, se ha obtenido que la práctica totalidad del alumnado del grupo de experimental consigue al menos un Índice de Competencia Matemática que se puede considerar medio en términos generales y la mitad del alumnado consigue niveles superiores y muy superiores, mientras que en el grupo de control la distribución del ICM se ajusta más a la curva normal.

Entre los seis chicos y chicas del grupo experimental diagnosticados como estudiantes de necesidades específicas de apoyo educativo debemos valorar como muy positivos los resultados obtenidos en los casos de capacidad intelectual límite y de trastorno del espectro autista, en los que se obtuvieron índices de competencia matemática medio y por encima de la media, respectivamente, así como desarrollos del conocimiento matemático propios de estudiantes de cursos superiores. En los otros casos se obtuvieron valores considerados por debajo de la media en uno de los alumnos y pobres en los otros. Creemos que esto se debe a que estos chicos están en unas circunstancias muy complicadas, con familias muy desestructuradas y con una situación de desapego bastante considerable, en algunos casos con ambos progenitores inmersos en procesos legales que les pueden llevar una situación de privación de libertad. Son casos que

necesitan una intervención educativa a otros niveles, no solo a nivel de aula, coordinada con otros agentes fuera y dentro del centro escolar.

En lo relativo a las limitaciones del estudio, hemos de destacar que:

- Para la elección de los grupos, se ha recurrido a dos colegios donde teníamos acceso y preveíamos que íbamos a contar con buenas condiciones de trabajo. En la medida de lo posible, se ha intentado escoger dos grupos escolares de características parecidas y pertenecientes a entornos socioeconómicos similares.
- Solo se ha estado en disposición de contrastar el nivel de desarrollo de la competencia matemática entre los grupos experimental y de control a término del primer ciclo de la educación primaria.

Por ello, en relación con nuestra hipótesis de trabajo, a saber: la utilización de la metodología basada en el uso de algoritmos ABN en los primeros años de aprendizaje matemático mejora significativamente el desarrollo del sentido numérico en general, nos parecería en este momento aventurado postular su cumplimiento a la vista de este estudio, que podría considerarse preliminar. No obstante, y a la vista de los resultados, creemos que estamos en condiciones de concluir que encontramos evidencias de una mejora significativa en el grado de desarrollo del sentido numérico tras la utilización de la metodología basada en los denominados algoritmos ABN.

Como reflexión final planteamos la importancia de encontrar hoy día alternativas metodológicas que aborden el aprendizaje del sistema de numeración decimal y de las operaciones aritméticas básicas de manera significativa y comprensible, frente a las metodologías basadas en los algoritmos tradicionales, cuyos mecanismos son sin duda incomprensibles para el alumnado en toda la enseñanza, además de carecer de mucho sentido, puesto que su aplicación actual fuera del entorno escolar es muy escasa, por no decir prácticamente nula. Particularmente y con independencia de que puedan existir otras metodologías idóneas, la basada en la utilización de los denominados algoritmos ABN se muestra como una alternativa metodológica que responde a los objetivos actuales en lo relativo al desarrollo del sentido numérico y a la orientación de este hacia el desarrollo de la competencia matemática, además de facilitar el desarrollo del conocimiento matemático de todos los niños y niñas, poniendo especial atención a los diferentes ritmos de aprendizajes de los mismos. Este enfoque integrador hacia la enseñanza de las matemáticas favorece la transformación del aula en un lugar de aprendizaje que potencia y apoya la participación de todo el alumnado, especialmente de los menos favorecidos, que con otras metodologías más rígidas parecen estar condenados al fracaso escolar, haciéndoles responsables únicos de esta frustración por “no alcanzar el nivel”.

Actualmente nos proponemos estudiar de forma pautada los procesos de enseñanza y aprendizaje implicados en todo el desarrollo de una ilusionante y ambiciosa intervención didáctica en tres colegios públicos ubicados en barrios con un alto riesgo de exclusión social y que supondrá una transformación metodológica plena en lo relativo al tratamiento del desarrollo del sentido numérico en toda la educación primaria en dichos centros. Este análisis, que no solo se centrará en las posibles mejoras de la competencia matemática tras la aplicación de la metodología, sino que también prestará especial interés a aspectos motivacionales, tendrá una primera fase, que se centrará en los

resultados de la implementación en el primer ciclo, y continuará a lo largo de toda la primaria.

## Referencias

- Ablewhite, R.C. (1971). *Las matemáticas y los menos dotados*. Madrid: Ediciones Morata.
- Arnaiz, P. y De Haro, R. (2004). Ciudadanía e interculturalidad: claves para la educación del siglo XXI. *Educatio Siglo XXI*, 22, 19–37.
- Baroody, A. J. (1988). *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid: MEC-Visor.
- Bracho-López, R. (2013, octubre). Menos reglas y más sentido: alternativas metodológicas a los algoritmos de cálculo tradicionales para el desarrollo del sentido numérico en la Educación Primaria. Comunicación presentada en el *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Montevideo.
- Bracho-López, R., Maz-Machado, A., Jiménez-Fanjul, N. y García-Pérez, T. (2011). Formación del profesorado en el uso de materiales manipulativos para el desarrollo del sentido numérico. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 28, 41–60.
- Castro, E. (2006). Competencia matemática desde la infancia. *Revista Pensamiento Educativo*, 39(2), 119–135.
- Chamorro, M.C. (Coord). (2005). *Didáctica de las Matemáticas. Colección Didáctica Infantil*. Madrid: Pearson-Prentice Hall.
- Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: MEC-Labor.
- Escudero, J.M. y Martínez, B. (2011). Educación inclusiva y cambio escolar. *Revista Iberoamericana de Educación*, 55, 85–105.
- Gallego-Espejo, M. (2013). *Algoritmos ABN vs Métodos Tradicionales de Cálculo en niños y niñas de Primer Ciclo de Educación Primaria*. Córdoba: Ediciones Universidad de Córdoba.
- García, T., Bracho, R., Maz, A., Lucena, M., Hidalgo, M.D., Adrián, C. y Jiménez, N. (2011). Una comunidad de investigación orientada al aprovechamiento de recursos didácticos para el desarrollo del sentido numérico en niños y niñas de primer ciclo en Educación Primaria. En VVAA, *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 113–121). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Ginsburg, H. y Baroody, A. J. (2007). *Tema-3: test de competencia matemática básica*. Madrid: TEA ediciones.
- Gómez, B. (1998). *Numeración y cálculo*. Madrid: Síntesis.
- Gómez, B. (1999). El futuro del cálculo. *UNO*, 22, 20–27.
- Greeno, J. (2001). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(13), 170–218.
- Heuvel-Panhuizen, M. (2000). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour*. Utrecht: ICME9, University of Utrecht.
- Junta de Andalucía (2012). *Orden de 8 de junio de 2012, por la que se regula el procedimiento de inscripción y continuidad de centros reconocidos como «Comunidad de Aprendizaje» y se crea la Red Andaluza «Comunidades de Aprendizaje»*. Sevilla: BOJA.



- Lerner, D. (1999). Reflexiones sobre: Uso del Material concreto en Matemáticas. *Problemas de la Vida cotidiana. Quehacer Educativo*, 34, 56–60.
- Maier, E.A. (1987). Basic Mathematical Skills or School Survival Skill? *Teaching Children Mathematics*, 2, art3.
- Martínez, J. (2008). *Competencias básicas en matemáticas: una nueva práctica*. Madrid: Wolters Kluwer.
- Martínez, J. (2000). *Una nueva didáctica del cálculo para el siglo XXI*. Barcelona: CissPraxis.
- Martínez, J. (2010). *Enseñar matemáticas a alumnos con necesidades educativas especiales*. Madrid: Wolters Kluwer.
- Martínez, J. (2011). El método de cálculo abierto basado en números (ABN) como alternativa de futuro respecto a los métodos tradicionales cerrados basados en cifras (CBC). *Bordón*, 63(4), 95–110.
- Maza, C. (1989). *Sumar y restar*. Madrid: Visor.
- NCTM (2000). *Principios y estándares para la educación matemáticas*. Granada: SAEM Thales.
- OECD (2003). *The PISA 2003 assessment framework. Mathematics, reading, science and problem solving know ledge and skills*. París: OECD.
- OECD (2004). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003*. París: OECD.
- Orrantía, J. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva. *Revista Psicopedagogía*, 23(71), 158–180.
- Rivière, A. (1990). Problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva cognitiva. En A. Marchesi, C. Coll y J. Palacios (Eds.), *Desarrollo psicológico y educación* (pp. 155–182). Madrid: Alianza.
- Zapata-Barrero, R. (2001). Hacia un nuevo concepto de ciudadanía. *Revista Anthropos*, 191, 3–20.