DIDÁCTICAS ESPECÍFICAS

ISSN: 1989-5240

Nº 7

DICIEMBRE DE 2012

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICAS ESPECÍFICAS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

CONSEJO DE REDACCIÓN Y CIENTÍFICO.

Han colaborado a esta edición Luis Francisco Rodríguez Verdejo, Idris Paredes Melchor.

SUMARIO

ARTÍCULOS

LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD EN EDUCACIÓN INFANTIL: CONOCIMIENTOS DISCIPLINARES, DIDÁCTICOS Y EXPERIENCIALES[1]

Angel Alsina[2]
Universidad de Girona

RESUMO:

En este artículo se realiza una aproximación a los conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales necesarios para que el profesorado de Educación Infantil pueda incorporar en su práctica docente la enseñanza de la estadística y la probabilidad de forma significativa, eficaz y sistematizada.
En primer lugar, se concretan un conjunto de conocimientos básicos relativos a la disciplina y se exponen los contenidos a trabajar secuenciados por niveles; en segundo lugar, se ofrecen orientaciones sobre cómo se aprenden y cómo deberían enseñarse los conocimientos de estadística y probabilidad en las primeras edades; y, finalmente, se muestran algunos ejemplos de actividades implementadas en aulas de Educación Infantil.
Palabras clave: estadística, probabilidad, educación matemática, educación infantil

ABSTRACT:

This article presents an approach to disciplinary knowledge, and experiential learning necessary for the Early Childhood Education teachers can teach statistics and probability significantly, effective and systematic.
First, are specified a set of basic knowledge about the discipline and exposed the contents sequenced by level; secondly, provides guidance on how they learn and how they should be taught the knowledge of statistics and probability in the first ages; and, finally, are some examples of activities implemented in kindergarten classrooms.
Keywords: statistics, probability, mathematics education, early childhood education

INTRODUCCIÓN

Todas las orientaciones internacionales en materia de educación matemática coinciden en que es necesario empezar a trabajar conocimientos de estadística y probabilidad desde la etapa de Educación Infantil.

Estas orientaciones provienen de referentes de reconocido prestigio en el ámbito de la educación matemática: los Principios y Estándares para la Educación Matemática del

---

[1] Este trabajo se ha realizado con la ayuda del Proyecto EDU2009-13893-C02-02, del Plan Nacional I+D+i (2008-2012)
[2] angel.alsina@udg.edu

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003), que aportan respuestas concretas, articuladas, rigurosas y no retóricas sobre lo que debería valorarse en la enseñanza de las matemáticas desde Educación Infantil hasta Bachillerato; y los Estándares Comunes para las Matemáticas de la *Common Core State Standars Initiative* (CCSSI, 2010), que describen distintos tipos de conocimientos que los profesores de matemáticas de todos los niveles deberían intentar fomentar en sus alumnos. El primer documento es extensivo en el sentido que especifica de forma muy detallada la comprensión, el conocimiento y las destrezas que deberían adquirir los alumnos a través de diez estándares: cinco estándares de contenido (números y operaciones, álgebra, geometría, medida y análisis de datos y probabilidad) y cinco estándares de procesos (resolución de problemas, razonamiento y demostración, comunicación, conexiones y representación). El segundo documento, en cambio, es más intensivo y define los procesos y competencias clave que definen lo que los alumnos de todas las edades deberían entender y saber hacer.

A pesar de estos referentes internacionales, en mi opinión existe todavía en España poca tradición de trabajar de forma sistemática el bloque de contenidos de estadística y probabilidad en Educación Infantil. Este déficit podría ser debido a que, como señala Blanco (2011), la investigación en educación matemática es muy reciente en nuestro país, por lo que cabe la posibilidad de que no se hayan podido aportar aún datos sólidos que hayan permitido incorporar la didáctica de la estadística y la probabilidad en las orientaciones curriculares o en la formación inicial de maestros de Educación Infantil.

En los últimos años, sin embargo, se está produciendo un cambio a todos los niveles que permite ofrecer una visión más optimista: hay un Grupo de Investigación en Educación Matemática Infantil (IEMI) dentro de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM); las actuales orientaciones curriculares relativas a la Educación Infantil señalan ya algunos conocimientos sobre este bloque de contenidos; y algunos programas de Didáctica de las Matemáticas del Grado de Educación Infantil, como por ejemplo en la Universidad de Girona, empiezan a incorporar temas relativos a los conocimientos disciplinares y didácticos sobre la estadística y la probabilidad en las primeras edades.

Esta triple coyuntura indica que es el momento óptimo de indagar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil para que tanto los maestros en ejercicio como los futuros maestros puedan incorporar en su práctica docente la enseñanza de la estadística y la probabilidad de forma significativa, eficaz y sistematizada. Para ello, en este artículo se va a realizar una aproximación a los saberes disciplinares, didácticos y experienciales: en primer lugar, van a concretarse un conjunto de saberes imprescindibles relativos a la disciplina, ya que no puede enseñarse algo que no se conoce o domina; en segundo lugar, se van a dar diversas orientaciones sobre cómo se aprenden y cómo deberían enseñarse los conocimientos de estadística y probabilidad; y, finalmente, van a mostrarse algunos ejemplos de actividades implementadas en aulas de Educación Infantil.

LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD EN LAS PRIMERAS EDADES

En este artículo se asume la acepción de Batanero y Godino (2004), según la cual la estadística (denominada también "datos" y "análisis de datos") se ocupa de los conocimientos que se refieren a datos y su análisis, mientras que la probabilidad (denominada también "azar") se ocupa de la comparación entre hechos aleatorios posibles y hechos reales contabilizados.

Su aprendizaje desde las primeras edades se justifica porque es útil para la vida posterior en la escuela, puesto que en muchas profesiones se precisan unos conocimientos básicos del tema; su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico basado en la valoración de la evidencia objetiva, apoyada en los datos, frente a criterios subjetivos; y ayuda a comprender los restantes temas del currículum, tanto de la educación obligatoria cómo posterior, donde con frecuencia aparecen gráficos, resúmenes o conceptos estadísticos.

Este bloque de contenido matemático tiene relación, sobre todo, con el bloque temático de "Medida" respecto al uso de unidades y técnicas, y con el bloque de "Números y operaciones" por su contenido predominantemente numérico. Tiene, además, una gran conexión con el Conocimiento del Medio Social y el entorno en general puesto que aporta, por ejemplo, los conocimientos necesarios para aprender a leer e interpretar tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios de comunicación.

Para determinar los conocimientos de estadística y probabilidad que deberían trabajarse en Educación Infantil se parte de diversos referentes internacionales y nacionales, para poder realizar posteriormente una propuesta de selección de contenidos interrelacionada con el resto de contenidos matemáticos que deberían trabajarse en esta etapa educativa.

Referentes internacionales

En la Tabla I se indican los estándares de estadística y probabilidad propuestos por la asociación norteamericana de sociedades de profesores de matemáticas (NCTM, 2003):

Tabla I
Estándares de estadística y probabilidad (NCTM, 2003)

Estándares para todas las etapas	**Estándares para la etapa Pre-K-2 (3-6 años)**
Formular cuestiones sobre datos y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlos.	Proponer preguntas y recoger datos relativos a ellos y a su entorno. Ordenar y clasificar objetos de acuerdo con sus atributos y organizar datos relativos a aquellos. Representar datos mediante objetos concretos, dibujos y gráficos.
Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en los datos.	Describir parte de los datos y el conjunto total de los mismos para determinar lo que muestran los datos.
Comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad.	Discutir sucesos probables e improbables relacionados con las experiencias de los alumnos.

En la Tabla II se exponen los procesos y competencias clave de estadística y probabilidad propuestos en los Estándares Comunes para las Matemáticas de la *Common Core State Standars Initiative* (CCSSI, 2010). Éstos se presentan en un dominio común llamado "Medición y datos" en los que se incluyen conocimientos de ambos bloques de contenido, por lo que se han seleccionado únicamente los que se refieren a la estadística y probabilidad:

Tabla II
Estándares comunes de estadística y probabilidad (CCSSI, 2011)

Estándares para la etapa Pre-K-2 (3-6 años)	
Clasificar objetos y contar el número de objetos según las categorías	Clasificar objetos en categorías determinadas, contar el número de objetos de cada categoría y ordenar las categorías según el número de objetos.

Cómo puede apreciarse en las dos Tablas anteriores, en términos genéricos, en las orientaciones internacionales los contenidos de estadística del 2º ciclo de Educación Infantil se centran sobre todo en la recogida de datos; la organización de los datos recogidos (clasificación, ordenación); la representación a través de objetos, dibujos o gráficos; y su posterior interpretación. En relación a la probabilidad, no se hace alusión a ella en los estándares comunes del año 2010, mientras que en los estándares del año 2003 se menciona que deberían trabajarse términos probabilísticos como "probable" e "improbable" a partir de hechos que provengan de la experiencia de los alumnos.

Referentes nacionales

Se toma como referencia el último documento normativo publicado, que corresponde a la *ORDEN ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación infantil.* En la Tabla III se exponen los contenidos que, a criterio del autor, guardan alguna relación con los conocimientos de estadística y probabilidad:

Tabla III
Contenidos de estadística y probabilidad en la ORDEN ECI/3960/2007

Área 2. Conocimiento del entorno Bloque 1. Medio físico: elementos, relaciones y medida.	Cuantificación no numérica de colecciones (muchos, pocos). Comparación cuantitativa entre colecciones de objetos. Relaciones de igualdad y de desigualdad (igual que, más que, menos que). Estimación cuantitativa exacta de colecciones y uso de números cardinales referidos a cantidades manejables. Utilización oral de la serie numérica para contar. Observación y toma de conciencia del valor funcional de los números y de su utilidad en la vida cotidiana.

Tal como se avanzaba en la introducción, a partir del análisis realizado se evidencia que todavía hay una escasa presencia de contenidos de estadística y probabilidad en las orientaciones curriculares nacionales. Aunque se empiezan a señalar algunos contenidos muy relacionados con el conocimiento numérico, como por ejemplo la comparación cuantitativa entre colecciones de objetos, o el uso de la serie numérica para contar, todavía no se explicitan contenidos relacionados con la organización de datos, su representación a través de gráficos sencillos y su posterior interpretación.

Tomando como punto de partida las orientaciones tanto internacionales como nacionales que se acaban de exponer, se realiza una propuesta que intenta concretar los contenidos de estadística y probabilidad que deberían trabajarse en el 2º ciclo de Educación Infantil, secuenciados por edades. Esta propuesta se inscribe en un marco mucho más general que organiza los contenidos matemáticos en tres grandes bloques: identificar, definir y/o reconocer; relacionar; y operar (Alsina, 2006, 2011):

Tabla IV
Contenidos de estadística y probabilidad en 1º de Educación Infantil (3-4 años)

Identificar, definir y/o reconocer	**Relacionar**
Identificación de datos sencillos del entorno cercano (por ejemplo, el tiempo que hace cada día: soleado, nublado, sol y nubes, lluvia).	Comparación de datos sencillos del entorno cercano (por ejemplo, clasificar a los alumnos según la edad que tienen).
Representación de datos con dibujos (por ejemplo, en el calendario poner cada día un dibujo del tiempo que hace: sol, nube, sol y nube, lluvia).	Comparación de los datos representados con dibujos (por ejemplo, si ha habido más días nublados que soleados, etc.)
Reconocimiento de hechos seguros/inseguros (por ejemplo, es seguro que un niño de 3º de Educación Infantil es mayor que uno de 1º, etc.; no es seguro que un niño de 2º sea mayor que uno de 1º, etc.).	Comparación de hechos sencillos y clasificación según si son seguros/inseguros (por ejemplo, que la nieve es fría es seguro; que el agua del mar sea fría no es seguro; etc.).

Tabla V
Contenidos de estadística y probabilidad en 2º de Educación Infantil (4-5 años)

Identificar, definir y/o reconocer	**Relacionar**
Identificación de datos algo más complejos (por ejemplo, el número de hermanos de cada alumno).	Comparación de datos algo más complejos (por ejemplo, clasificar los alumnos según la cantidad de personas que viven en casa).
Representación de datos con objetos (por ejemplo, con cubos de madera podemos representar el número de hermanos que tiene cada alumno).	Comparación de los datos representados con objetos (por ejemplo, si hay más alumnos que no tienen ningún hermano, un hermano, dos hermanos, etc.)
Reconocimiento de hechos probables/improbables sencillos (por ejemplo, la probabilidad que haga mucho calor y se pueda ir a la playa un día de invierno, etc.).	Comparación de hechos sencillos y clasificación según si son probables/improbables (por ejemplo, la probabilidad que haya conejos de color marrón; vacas de color azul; corderos de color blanco; etc.).

Tabla VI
Contenidos de estadística y probabilidad en 3º de Educación Infantil (5-6 años)

Identificar, definir y/o reconocer	**Relacionar**
Identificación de datos cada vez más complejos (por ejemplo, el nº de pie que calza cada niño).	Comparación de datos cada vez más complejos (por ejemplo, ordenar los alumnos según el nº de bolsillos de la ropa).
Representación de datos en gráficos y diagramas sencillos (diagramas de barras).	Comparación de datos en diagramas de barras sencillos.
Reconocimiento de hechos posibles/imposibles (por ejemplo, que salga un 3 si echamos un dado; que salga un 8 si echamos un dado, etc.)	Comparación de hechos y clasificación según si son posibles/imposibles (por ejemplo, clasificar los números dígitos según si es posible o imposible que se obtengan al echar un dado, etc.).

Como puede apreciarse en las Tablas IV, V y VI, la propuesta de contenidos de estadística y probabilidad para el 2º ciclo de Educación Infantil se centra sobre todo en la recogida de datos; la organización de los datos recogidos (clasificación, ordenación);

la representación a través de objetos, dibujos o gráficos; y su posterior interpretación. Se trata de datos cercanos a la propia experiencia, que pueden ser propuestos por el maestro o bien por los propios alumnos. Progresivamente se debería favorecer la representación de los datos, primero a través de representaciones concretas con dibujos y objetos en las que se trata de hacer correspondencias término a término, es decir, cada unidad se representa con un elemento; y posteriormente a través de representaciones más convencionales con tablas y diagramas de barras, que es un tipo de representación en la que cada caso se representa con una unidad:

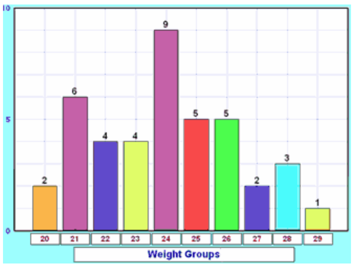


Fig. 1: Ejemplo de diagrama de barras

En relación a la probabilidad, de acuerdo con las orientaciones internacionales y nacionales analizadas, en la propuesta presentada en las Tablas IV, V y VI se propone que los alumnos comprendan términos probabilísticos como “seguro”, “probable” o “imposible” a partir de hechos que forman parte del entorno de los alumnos.

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD EN LAS PRIMERAS EDADES

Desde una perspectiva genérica, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM, 2003) indica que las actividades informales de comparar, clasificar y contar pueden proporcionar a los alumnos los inicios matemáticos para desarrollar la comprensión de los datos, el análisis de datos y la estadística. Progresivamente, el hecho de plantearles cuestiones para investigar, fomentar que organicen los datos y que los representen usando diferentes recursos (dibujos, objetos, etc.) les ayuda a ir comprendiendo el significado de la estadística. Y como se ha indicado en el apartado anterior, a medida que avanzan en la escolaridad y se hacen más complejas las cuestiones planteadas se debería ir incrementando el uso de representaciones convencionales.

Batanero y Godino (2004) exponen que hay varios estudios que proporcionan orientaciones sobre como favorecer el desarrollo del razonamiento estadístico. Algunas de estas orientaciones son las siguientes:

- Involucrar a los alumnos en el desarrollo de proyectos sencillos en los que tengan que recoger sus propios datos a partir de la observación (¿de qué color son los ojos de los alumnos de la clase?); encuestas (¿qué tipos de trabajo hacen las madres y los padres de los alumnos?); y medidas (¿tienen los pies, manos, hombros mayores los niños que las niñas?).
- Concienciar a los alumnos que cada dato aislado forma parte de un todo (distribución de los datos) y que hay preguntas que no pueden contestarse con un único dato, sino con una distribución de datos.
- Concienciar a los alumnos de las tendencias y variabilidad en los datos y como éstas pueden usarse para responder preguntas sobre los datos o comparar varios conjuntos de datos.
- Visualizar progresivamente que los datos recogidos son una muestra de una población más amplia y sobre cuáles son las condiciones para que los datos de la muestra puedan representar los datos de toda la población.
- Animar a los alumnos a representar sus datos en tablas y gráficos, cuidando los aspectos matemáticos y estéticos de los gráficos de manera que los datos se representen correctamente.

En relación a la enseñanza de la probabilidad, hay que tener presente que en las primeras edades debería centrarse sobre todo en favorecer que los alumnos discutan sobre si los sucesos familiares a su experiencia los parecen fáciles o difíciles de ocurrir. En cualquier caso, hay que tener presente que las ideas de probabilidad tienen que ser informales. Algunas orientaciones didácticas son las siguientes:

- Proporcionar una amplia variedad de experiencias que permitan observar los fenómenos aleatorios y diferenciarlos de los deterministas.
- Estimular la expresión de predicciones sobre el comportamiento de estos fenómenos y los resultados, así como su probabilidad.

- Organizar la recogida de datos de experimentación de forma que los alumnos tengan posibilidad de contrastar sus predicciones con los resultados producidos y revisar sus creencias en función de los resultados.
- Resaltar el carácter imprevisible de cada resultado aislado, así como la variabilidad de las pequeñas muestras, mediante la comparación de resultados de cada niño o por parejas.
- Ayudar a apreciar el fenómeno de la convergencia mediante la acumulación de resultados de toda la clase y comparar la fiabilidad de pequeñas y grandes muestras.

Desde una perspectiva más concreta, a continuación se definen distintos tipos de actividades de estadística y probabilidad que pueden trabajarse en Educación Infantil partiendo de la base que los alumnos de las primeras edades realizan múltiples actividades informales de comparar, clasificar y contar que los permiten iniciarse en la comprensión de los datos, del análisis de datos y de la estadística, como ya se ha indicado. Ocurre lo mismo con las nociones de probabilidad: hay muchas situaciones de su propia experiencia que les permiten, progresivamente, tomar conciencia de hechos que son seguros, probables o imposibles. Desde este marco, las posibles actividades se clasifican en tres grupos:

Actividades de la vida cotidiana

Cualquier situación cotidiana se puede usar para trabajar contenidos matemáticos en general, y de estadística y probabilidad en particular. A modo de ejemplo se exponen algunas situaciones que pueden ser aprovechadas desde el punto de vista indicado:

Situación 1: Durante las rutinas

Es habitual que cada día por la mañana, cuando ya han llegado los alumnos a clase, se sienten en círculo y se establezca un diálogo en el que se analiza, por ejemplo, si están todos, si falta alguien, etc. De manera informal, pues, se está haciendo un análisis de datos (en este caso de los alumnos que han venido y los que no), y a menudo se hace una representación a través de las imágenes de los propios alumnos, que se clasifican en dos grupos según si han venido o no a la escuela.

Situación 2: Cuando se organizan los alumnos para realizar actividades

En todas las escuelas los alumnos están organizados de alguna manera: por niveles; por aulas temáticas; etc. Sea cual sea el tipo de organización, requiere una comprensión de los datos por parte de los propios niños (progresivamente, analizan estos datos y toman conciencia de los que son de su grupo; los que no lo son; etc.).

Estas actividades pretenden que los alumnos se inicien en el desarrollo de la comprensión de los datos, del análisis de datos, de la estadística a partir de actividades informales de contar, comparar y clasificar. Hay muchas otras pequeñas investigaciones que pueden proponerse en las primeras edades con esta finalidad, como por ejemplo con qué mano escriben; la medida de los pies, o del número que calzan; si llevan o no llevan gafas; la edad que tienen; votaciones; etc. Todas estas actividades conllevan una tarea de recogida y cuantificación de datos; una organización de los datos; una representación concreta de los datos (por ejemplo dibujar manos en un papel según si escriben con la derecha o la izquierda, recortarlas y colocarlas en dos columnas) o una representación pictórica (por ejemplo usar cruces en las votaciones); y finalmente una interpretación y comparación de los datos representados.

Actividades con materiales y juegos

Las situaciones de experimentación con materiales diversos son idóneas para favorecer el análisis de datos y de hechos seguros, probables o imposibles. Se pueden utilizar materiales muy diversos: tarjetas que representan el tiempo que hace cada día; cajas; cubos de madera de un decímetro cúbico, uno por cada niño de la clase; etc. Con estos materiales se trata de construir un primer gráfico estadístico que, debido a su gran simplicidad, permite que los alumnos comprendan desde pequeños esta forma de representar algo real, propio de ellos mismos o del entorno inmediato.

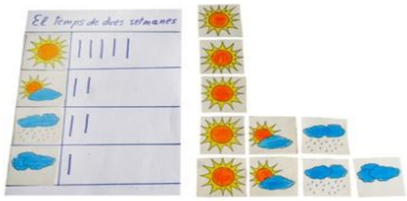


Fig. 2: representación del tiempo en un diagrama de barras, a través de dibujos

La mayoría de los juegos (de patio, de tablero, etc.) comportan también un análisis de datos y, algunos de ellos, se centran específicamente en nociones de probabilidad, como por ejemplo los juegos de azar.

Los juegos de azar son juegos en los que las posibilidades de ganar o perder no dependen de la habilidad del jugador sino exclusivamente del azar. Por este motivo la mayoría de ellos son también juegos de apuestas, los premios de las cuales están determinados por la probabilidad estadística de acertar la combinación elegida. Muchos juegos combinan el simple azar con la destreza de los jugadores. La destreza del jugador es útil, sobre todo, para calcular las posibilidades que se derivan de una o varias acciones, en relación siempre con el azar; además, el jugador tiene que ser hábil para reducir la probabilidad de resultados desfavorables y aumentar la de los favorables mediante sus acciones. Ganar o perder en esta clase de juegos depende, en buena medida, de la habilidad de los jugadores, pero el componente impredecible que es el azar puede arrebatar la victoria incluso al jugador más experimentado.

Algunos juegos de azar para alumnos de las primeras edades son los siguientes:

Tabla VII

Juegos de azar para alumnos de Educación Infantil

Nombre del juego	Descripción	¿Qué se trabaja?
Juegos con dados	Entre los múltiples sistemas de juego con dados destacan los de los juegos de mesa como por ejemplo el parchís, el juego del ganso, etc.; y los que se juegan a través de apuestas, como el *Craps*, también denominado *Seven eleven*, con dos dados que tienen que entrar dentro de un límites marcados de la mesa.	Reconocimiento de la probabilidad (seguro, probable, imposible) Identificación de cantidades.
Juegos de tablero: el tres en línea, etc.	El tres en línea es un juego de tablero en el que la finalidad es conseguir poner tres piezas sobre el tablero (de 3 por 3 posiciones) de forma que estén en línia recta (horizontal, vertical o diagonal). Hay diferentes maneras de jugar: - Cada jugador tiene tres piezas y las va poniendo sobre el tablero. Hay que hacer tres en línia (horizontal o verticalmente, no valen las diagonales). Si al poner las piezas no se ha hecho 3 en raya se van moviendo las piezas por el tablero siguiendo las línies hasta conseguirlo. - Igual que el anterior pero sí valen las diagonales. - Cada jugador tiene cuatro piezas, si al poner las piezas en el tablero no se consigue hacer tres en raya la partida queda en tablas y se vuelve a empezar. - Cuatro piezas por jugador, el primero tiene la obligación de jugar a la posición central, una vuelta puestas las piezas, se pueden mover todas excepto la central.	Reconocimiento de la probabilidad (seguro, probable, imposible). Identificación de cantidades. Identificación de la posición

El bingo	El bingo es un juego de azar bastante antiguo. Consiste en un bombo con un número determinado de bolas numeradas en su interior. Se trata de un juego muy popular en todo el mundo del que existen dos variedades típicas, que son el bingo de 90 bolas y el bingo de 75 bolas. Los jugadores juegan con cartones donde hay números aleatorios escritos, dentro del rango correspondiente, 1-75 o 1-90. Un locutor va sacando bolas del bombo, cantando los números en voz alta. Si un jugador tiene aquel numero en su cartón lo tacha, y el juego continua así hasta que alguien consigue marcar o bien una línea o bien todos los números de su cartón. Entonces el jugador tiene que decir con voz alta: "!BINGO!". Hay muchas variedades posibles: bingos de operaciones, etc.	Reconocimiento de la probabilidad (seguro, probable, imposible). Identificación de cantidades. Operaciones aritméticas. Identificación de la posición.
Los *memorys*	Se trata de un juego de memoria donde se tienen que hacer parejas destapando y tapando tarjetas.	Reconocimiento de la probabilidad (seguro, probable, imposible)

ALGUNOS EJEMPLOS DE ACTIVIDADES IMPLEMENTADAS EN AULAS DE EDUCACIÓN INFANTIL

En este último apartado se presentan diversas actividades que forman parte de experiencias en las que se trabajan de forma globalizada los diferentes bloques de contenido matemático a través de los diferentes procesos matemáticos, dado que al combinarse los contenidos con los procesos se generan nuevas miradas que acentúan las relaciones que se establecen entre ellos, fomentando así un enfoque interdisciplinar y globalizado (Alsina, 2012a, 2012b).

Estas actividades se han diseñado en el marco de diferentes actividades de formación permanente del profesorado de Educación Infantil en las que el autor de este artículo ha sido el formador. Se trata de actividades implementadas por maestros del 2º ciclo de Educación Infantil en diferentes centros escolares de la geografía española.

Experiencia 1: “Aprendemos matemáticas en el patio del colegio” (Alsina, 2012a)

Esta experiencia se ha llevado a cabo en los colegios “Juan XXIII”, de Castilleja de Cuesta y “El Manantial”, de Bormujos (Sevilla), con alumnos de 3 a 6 años. Los maestros responsables de la implementación son Domitila Ceballos; Cristina Ruiz, Israel Montes y M. Concepción Ruiz.

El contexto de aprendizaje escogido para llevar a cabo esta experiencia es el patio de la escuela, al tratarse de un contexto muy conocido por los alumnos que ofrece muchas posibilidades para trabajar contenidos matemáticos de todos los bloques. En relación a la estadística y probabilidad se trabajan los siguientes aspectos:

Tabla VIII
Conocimientos de estadística y probabilidad que se trabajan en el patio

Resolución de Problemas	**Razonamiento y demostración**	**Comunicación y representación**	**Conexiones**
¿Qué tiempo hace hoy? ¿Qué probabilidad hay de que llueva?	Argumentación de las ideas propias (por ejemplo, justificar porque se piensa que va a llover, etc.)	Descripción y organización de los datos recogidos (cuántos niños piensan que hará sol; cuántos piensan que estará nublado; etc.) Representación de los datos obtenidos en un diagrama de barras.	Conocimiento del Medio: el tiempo atmosférico. Lengua: vocabulario relativo al tiempo atmosférico.

A partir de las pequeñas investigaciones planteadas, relativas al tiempo atmosférico, los alumnos recogen datos, los analizan, los discuten y al final los representan en un diagrama de barras.

Experiencia 2: "Las plantas y árboles de nuestro patio" (Alsina, 2011a)

Esta experiencia se ha llevado a cabo en la Escuela "Lepanto" de Mairena del Aljarafe (Sevilla), con alumnos de 4-6 años. Las maestras responsables de la implementación son Juani Moreno Gordillo, Águeda Vázquez Vázquez, Irene Penco Olivera, Antonia del Valle Guzmán Díaz, Fátima Rocío Perianez Pérez e Irene Fenoy Pérez.

Como en la experiencia anterior, el contexto de aprendizaje escogido para llevar a cabo esta experiencia es el patio de la escuela, aunque en esta ocasión el análisis se ha centrado exclusivamente en las plantas y árboles que hay en el patio: a partir de una hoja de registro los alumnos van anotando el número de árboles de cada especie, y una vez en clase organizan los datos y los representan también en un diagrama de barras.

Tabla IX
Conocimientos de estadística y probabilidad que se trabajan a partir de la observación de las plantas y árboles del patio

Resolución de Problemas	**Razonamiento y demostración**	**Comunicación y representación**	**Conexiones**
¿Cúantos árboles hay de cada especie?	Argumentación de las ideas propias (por ejemplo, realizar una estimación de la cantidad de árboles y justificarla, etc.)	Descripción oral y organización en el papel de los datos recogidos (cuántos árboles hay de cada especie). Representación de los datos obtenidos en un	Conocimiento del Medio: tipos de árboles. Lengua: vocabulario relativo a los nombres de los árboles.

		diagrama de barras.	

En la Figura 3 se aprecia la representación realizada, que se trata de un diagrama de barras en disposición horizontal:

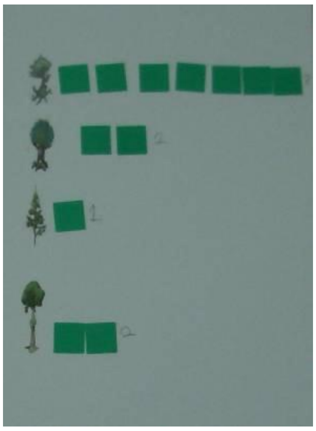


Fig. 3: representación del número de árboles de cada especie

Experiencia 3: "Una excursión al cine" (Alsina *et al.*, 2012)

Esta experiencia se ha llevado a cabo en el colegio "Santo Domingo de Silos" de Bormujos (Sevilla) con alumnos de 5-6 años. Las maestras responsables de su implementación han sido Inés M. Jiménez, Juliana Melo, Juani Moreno, Olga M. Pastelero, Almudena Sánchez, Esmeralda Silva.

En esta ocasión, las maestras responsables de la implementación de la actividad se reúnen en ciclo con el propósito de analizar las posibilidades que ofrece una excursión al cine para trabajar conocimientos matemáticos. En la tabla X se exponen los conocimientos de estadística y probabilidad:

Tabla X

Conocimientos de estadística y probabilidad que se trabajan en una excursión al cine

Resolución de Problemas	**Razonamiento y demostración**	**Comunicación y representación**	**Conexiones**
¿Cuántos niños van al cine y cuántos no? ¿Qué desayuno llevamos para ir al cine? ¿Qué tiempo meteorológico hará el día de la excursión? ¿Cuál es el camino más corto según el itinerario elegido? ¿Qué película vamos a ver?	Explicación de los resultados obtenidos a partir del análisis realizado. Argumentación sobre la probabilidad de lluvia, de sol, de viento, etc.	Realización de un diagrama de barras con los niños que van al cine y los que no van. Realización de un diagrama de barras con el tipo de desayuno. Verbalización de la probabilidad de lluvia, de sol, de viento, etc. Probabilidad de llegar antes o después según el recorrido elegido.	Conocimiento de uno mismo: análisis de los niños que no han venido por estar enfermos.

Antes de la excursión, en clase los alumnos votan qué película quieren ver. En la imagen siguiente se observa el recuento que realiza una alumna para saber qué película es la ganadora.

Fig. 4: representación en un diagrama de barra de los resultados de una votación

Experiencia 4: "Una salida a una plaza" (Alsina, 2012a)

Esta experiencia se ha llevado a cabo en el colegio "Marta Mata" de Girona, con alumnos de 4 a 5 años. La maestra responsable de la implementación es Marta López.

Para llevar a cabo esta experiencia se elige como contexto de aprendizaje la plaza "Pere Torrent" de un pueblo de costa muy turístico cercano a Girona (Lloret de Mar). Esta plaza tiene unas características arquitectónicas que la convierten en un contexto ideal para trabajar *"in situ"* contenidos matemáticos.

Tabla XI

Conocimientos de estadística y probabilidad que se trabajan a partir de una visita a una plaza

Resolución de Problemas	**Razonamiento y demostración**	**Comunicación y representación**	**Conexiones**
¿Cuántas cosas hay en la plaza que miden menos de un metro?; ¿y más de un metro?	Justificación sobre cómo se pueden organizar los datos recogidos.	Descripción oral de los datos recogidos después de medir. Representación de los datos en un diagrama de barras.	Conocimiento del Medio: observar y conocer con más detalle nuestro entorno.

En esta actividad se conectan tres bloques de contenido: la numeración, la medida y la estadística y probabilidad, siendo la medida el eje central de la actividad, ya que el propósito es que los alumnos hagan práctica de medida en un contexto real de aprendizaje (Freudenthal, 1991). En este caso concreto los alumnos investigan qué elementos hay en la plaza que midan menos o más de un metro, organizan los datos clasificándolos en dos grupos, y los representan finalmente en un diagrama de barras.

Experiencia 5: "las matemáticas de casa" (Alsina *et al.*, 2011)

La última experiencia que se presenta en este artículo se ha implementado en los tres niveles del 2º ciclo de Educación Infantil de los centros "El Algarrobillo", de Valencina de la Concepción, "Mª Carmen Gutiérrez", de Espartinas y "Josefa Frías" de Santiponce, de la provincia de Sevilla. Las maestras responsables de la implementación han sido Mª Luisa Paredes, Ana Mª. Pérez, Mercedes Díaz, Mª. José Ramos y Vanessa Peña.

En esta ocasión el contexto elegido es la casa en la que vive cada alumno, al considerar que se trata de un entorno muy conocido y, por lo tanto, todos los alumnos pueden aportar datos. Para obtener dichos datos se envía una nota a casa para pedir a las familias su colaboración. En dicha nota se pide una fotografía de cada dependencia así como una imagen con la mesa puesta en la que se aprecie el número de personas que viven en la casa (las imágenes pueden ser en formato papel o bien enviarlas a una dirección de correo electrónico).

En la Tabla XII se presentan los conocimientos de estadística y probabilidad trabajados:

Tabla XII

Conocimientos de estadística y probabilidad que se trabajan a partir de la observación de la propia casa

Resolución de Problemas	**Razonamiento y demostración**	**Comunicación y representación**	**Conexiones**
¿Cuántas estancias hay en tu casa?	Explicación razonada de las regularidades en los datos obtenidos (por ejemplo, en la mayoría de casas hay dos baños)	Verbalización de los datos obtenidos. Representación de los datos en un diagrama de barras.	Recogida de datos y organización de los mismos en una gráfica.

En la Figura 5 se muestra cómo una alumna ha realizado un recuento de los platos que hay de cada forma en la cocina de su casa.

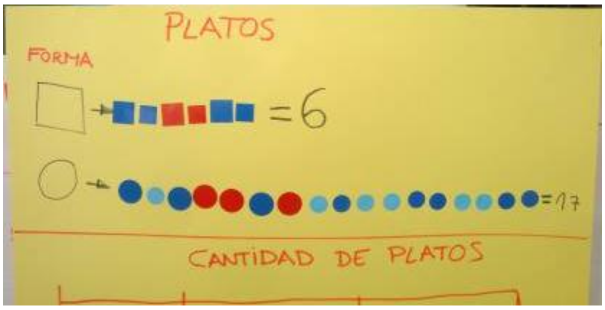


Fig. 5: conteo y posterior representación en un diagrama de barras del número de platos de cada forma

Las experiencias anteriores constituyen una pequeña muestra del trabajo que puede realizarse en las aulas de Educación Infantil para favorecer que los alumnos de las primeras edades empiecen a interiorizar conocimientos de estadística y probabilidad. Estas actividades que provienen de la práctica no pretenden transmitir un conocimiento elaborado por otros, sino que quieren ser un andamio para construir o reconstruir el propio conocimiento sobre la práctica docente.

CONCLUSIONES

En este artículo se ha puesto de manifiesto, en primer lugar, que los principales referentes internacionales en materia de educación matemática señalan la necesidad de incorporar la estadística y la probabilidad de forma sistemática en Educación Infantil (NCTM, 2003; CCSSI, 2010). De estos referentes internacionales se extraen tres ideas fundamentales: a) la adquisición de conocimientos de estadística y probabilidad se inicia con las matemáticas informales; b) su enseñanza formal, en la escuela, se sitúa a partir de los 3-4 años (2º ciclo de Educación Infantil); y c) los contenidos de estadística y probabilidad se adquieren y comprenden a través de los distintos procesos matemáticos. Algunos de los contenidos de estadística que se mencionan en estas orientaciones curriculares son la recogida de datos; la organización de los datos recogidos (clasificación, ordenación); la representación a través de objetos, dibujos o gráficos; y su posterior interpretación. En relación a la probabilidad se menciona que deberían trabajarse términos probabilísticos como “probable”, “seguro” y “posible” a partir de hechos que provengan de la experiencia de los alumnos.

A pesar de estas orientaciones internacionales, se ha detectado una escasa presencia de estos contenidos en las orientaciones curriculares vigentes en España, que se atribuye a la relativa juventud de la investigación en educación matemática en nuestro país. En este sentido, Blanco (2011) señala que la investigación en educación matemática ha tenido un fuerte impulso en las dos últimas décadas, lo que podría ser un posible factor explicativo de este déficit en las orientaciones curriculares vigentes que lógicamente repercutiría en las prácticas de aula de los maestros en ejercicio. Paralelamente, la escasez de datos provinentes de la investigación sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística y la probabilidad en las primeras edades podría explicar también la escasa formación que han recibido hasta hace relativamente poco tiempo los futuros maestros durante su formación inicial.

Tomando como punto de referencia las orientaciones internacionales, se ha presentado una propuesta para trabajar de forma sistematizada, y en conexión con los demás bloques de contenido, los conocimientos relativos a la estadística y la probabilidad en el 2º ciclo de Educación Infantil. Esta propuesta se inscribe en un marco más general que organiza los contenidos a trabajar a partir de tres grandes capacidades: identificar, relacionar y operar (Alsina 2006, 2011), para poder evidenciar algunas conexiones que existen, a nivel interdisciplinar, entre los diferentes bloques de contenido matemático.

Aparte de proponer una posible secuenciación de contenidos por edades, se han ofrecido también algunas orientaciones didácticas para trabajar dichos contenidos. Estas orientaciones parten de trabajos previos en los que se señala que el conocimiento matemático durante las primeras edades debería trabajarse a partir de contextos de aprendizaje de vida cotidiana, materiales manipulativos, juegos, etc. En esta misma línea, otros autores como Batanero y Godino (2004) exponen que hay varios estudios que proporcionan orientaciones sobre como favorecer el desarrollo del razonamiento estadístico a través de proyectos sencillos en los que los alumnos tengan que recoger sus propios datos a partir de la observación de situaciones de su entorno inmediato.

Finalmente, se han presentado algunas actividades implementadas en diferentes centros escolares de la geografía española que forman parte de experiencias en las que se trabajan los diferentes bloques de contenido matemático de forma globalizada, y a partir de los diversos procesos matemáticos (Alsina, 2012a, 2012b). Con estos conocimientos experienciales, se fundamenta que es necesario conectar los aprendizajes escolares con la vida cotidiana para poder poner en práctica los conocimientos adquiridos, ya que estableciendo esta relación los alumnos comprenden que las matemáticas que han aprendido tienen un sentido y una funcionalidad, favoreciendo así su alfabetización.

BIBLIOGRAFÍA

ALSINA, A. (2012a). Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 1*(1), 1-14.

ALSINA, A. (2012b). Hacia un enfoque globalizado de la educación matemática en las primeras edades. *Números, 80,* 7-24.

ALSINA, A.; JIMÉNEZ, I.M.; MELO, J.; MORENO, J.; PASTELERO, O.M.; SÁNCHEZ, A. y SILVA, E. (2012). Cómo enseñar matemáticas en las primeras edades a partir de contextos de vida cotidiana. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 61*, 97-106.

ALSINA, A. (2011). *Educación matemática en contexto de 3 a 6 años.* Barcelona: ICE-Horsori.

ALSINA, A., PAREDES, Mª.L., PÉREZ, A.Mª, DIAZ, M., RAMOS, Mª.J. y PEÑA, V. (2011). ¿Qué matemáticas hay en mi casa? *Cuadernos de Pedagogía, 413,* 26-28.

ALSINA, A. (2006). *Como desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años.* Barcelona: Editorial Octaedro.

BATANERO, C. y GODINO, J. D. (2004). VI. Estocástica: estadística y probabilidad. En J.D. GODINO (Ed.), *Didáctica de las matemáticas para maestros*. (pp. 405-455). Departamento de Didáctica de las Matemáticas: Universidad de Granada.

BLANCO, L. (2011). La investigación en educación matemática. *Education S. XXI*, *29*(1), 109-128.

COMMON CORE STATE STANDARDS INITIATIVE (2010).Common Core State Standars for Mathematics.Recuperado el 30 de Septiembre de 2011 en<http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf>.

FREUDENTHAL, H. (1991). *Revisiting mathematics education*.Dordrectht: Kluwer Academic Publishers.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2003).*Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla. SAEM Thales.

STORIA E DIDATTICA DELLA SCIENZA: CONCETTI ED ESEMPI

Paolo Caressa[3]

RESUMEN:

En este nota se discute por medio de ejemplos la interrelación entre historia y didáctica de la ciencia: después de haber introducido los argumentos clásicos que abogan la importancia del enfoque histórico por la didáctica de la ciencia, se introduce una metáfora geométrica por encuadrar la cuestión, que llamamos *triángulo conceptual*. Por medio de esa metáfora se analizan unos ejemplos de científicos que utilizaron la historia tanto por sus investigaciones cuanto por su enseñanza, y luego vamos a introducir las motivaciones que, según nosotros, son más significativas por la *integración* de la historia con la didáctica, presentando muchos ejemplos.
Palabras clave: historia de la ciencia

ABSTRACT:

In this note we discuss, by means of examples, the relation between history and didactics of science: after recalling the classical arguments which advocates the importance of the historical approach for the didactics of science, a geometrical metaphor is introduced to provide a conceptual framework, which we call *conceptual triangle*. By means of this metaphor we analyse some examples of scientists who used history both when performing their research and as a didactic tool. Next we introduce the motivations which, in our opinion, are more relevant to the *integration* of history with didactics, quoting several examples.
Keywords: history of science

1. INSEGNARE ATTRAVERSO LA STORIA

Il rapporto fra storia e didattica nell'insegnamento della scienza, e in particolare della matematica, è un connubio classico e ben riconosciuto: il valore dello studio della storia della scienza come ausilio alla didattica è talmente radicato da rendere le due discipline indissolubilmente associate nelle facoltà universitarie scientifiche. Infatti, gli esami di storia della matematica e della scienza sono solitamente inseriti nei piani di studi dell'indirizzo didattico delle facoltà scientifiche, mentre sono ignorati nei piani di studio degli altri indirizzi.

[3] paolo.caressa@codin.it

Il motivo principale per il quale la storia della scienza fornisce un ausilio alla didattica è quasi scontato: da un lato infatti approfondire la storia di una disciplina aiuta a motivare le nozioni che, se impartite secondo un approccio puramente concettuale, calerebbero altrimenti dall'alto; d'altra parte studiare la storia di una disciplina consente di temperarne le asprezze per i discenti che si sentono meno portati o che hanno difficoltà con gli aspetti tecnici della materia.

Ma c'è, a mio parere, una motivazione fondamentale per legare lo studio della scienza alla sua storia: infatti la scienza è una *impresa collettiva*. A differenza della pittura, della letteratura e in qualche misura anche della musica, la scienza ha bisogno della sua storia per alimentarsi e progredire. È proverbiale l'*affermazione* di Newton "se ho potuto vedere lontano è perché stavo sulle spalle dei giganti"[4]: l'attività di uno scienziato non può non tenere conto dell'opera dei suoi predecessori e dei progressi dei suoi contemporanei, la scienza è basata sulla comunicazione ed è quindi un'attività eminentemente umana. Spesso si perde di vista questo fatto nel considerare invece la scienza come un mero catalogo di tecniche priva della carica di passione e umanità tipica della poesia, dell'arte o della musica.

Nella scuola secondaria esiste una divisione netta fra le materie che vengono insegnate per argomenti e quelle delle quali è insegnata la storia: le prime sono le materie scientifiche e le lingue, le altre le materie umanistiche. Per esempio si studia la trigonometria, la fisica, la biologia, la lingua inglese ma non la storia di queste discipline. Di contro si studia la storia della letteratura, la storia della filosofia, la storia dell'arte (colpevolmente non la storia della musica). In questo modo, il pensiero filosofico viene studiato sostanzialmente di pari passo con lo sviluppo della storia occidentale, in modo che lo studente possa naturalmente inquadrare gli autori e le correnti di pensiero nel loro contesto storico. Lo stesso è vero per la letteratura e le arti figurative.

Invece nel caso della matematica, per esempio, i programmi prevedono un ordinamento logico, scollegato dallo sviluppo storico, il che impedisce di intuire la presenza di un'evoluzione del pensiero matematico e quindi di guardare alla scienza come a una disciplina in divenire, e correlare le concezioni scientifiche delle varie epoche storiche con le altre correnti di pensiero. Vero è che l'ordine logico degli argomenti spesso

[4] Lettera a Robert Hooke (1635-1703) del 5 febbraio 1676, cfr. Brewster (1855).

ripercorre l'ordine storico nel quale questi sono stati scoperti[5], tuttavia questo è incidentale e in ogni caso il formalismo e l'interpretazione dei concetti fa sempre riferimento al pensiero corrente, o meglio alla rappresentazione del pensiero corrente presso la comunità didattica.

Come che sia, la distinzione fra ciò che va studiato storicamente e ciò che va studiato logicamente sembra quindi replicare la distinzione fra sapere umanistico e sapere scientifico. Una possibile spiegazione di questo fenomeno, che prescinde da considerazioni profonde sulla natura della cultura in Italia e in Europa, può essere il pregiudizio in base al quale certe discipline richiedono un talento e altre la semplice trasmissione di una tecnica. Questo corrisponde all'idea crociana, che tanti danni ha causato alla cultura italiana del Novecento, di una superiorità della conoscenza storico-umanistica rispetto a quella scientifica: quest'ultima si deve limitare a impartire conoscenze tecniche, trasmissibili e replicabili, laddove letteratura e filosofia volano nell'empireo dei concetti assoluti.

Tralasciando le farneticazioni crociane[6], è certo che mentre si può insegnare la matematica, la fisica, la geografia, etc., non è chiaro come insegnare letteratura, arte o filosofia: di solito si riconosce che scrittori, artisti e anche filosofi possiedono un talento, un istinto, una predisposizione verso queste discipline che le rendono non trasmissibili con l'insegnamento (il che è incidentalmente vero anche per la matematica e le scienze in generale).

Questo è, ovviamente, vero fino a un certo punto, tuttavia volendo insegnare la poesia, la cosa più naturale sembra essere mostrare esempi di poesie, analizzarle, cercare di capire i meccanismi per mezzo dei quali i poeti compongono i loro versi, etc. E tuttavia è difficile pensare a un "compito in classe di poesia" che dia luogo a una valutazione oggettiva quanto un compito che chieda di studiare una funzione, risolvere un problema

[5] Si pensi per esempio allo studio della fisica: si parte con la meccanica galileiana e newtoniana, quindi col Seicento, poi si studia la termodinamica, siamo quindi nel primo Ottocento, e infine ottica ed elettromagnetismo, pieno Ottocento, con cenni di relatività e fisica quantistica, e siamo alle soglie del Novecento; in mezzo c'è il passaggio fondamentale della sistematizzazione teorica della meccanica operata da Lagrange e Hamilton a cavallo fra Settecento e Ottocento, che ha fornito il quadro di riferimento per l'ottica, per la meccanica statistica e per la teoria quantistica, ma questo passaggio, che mostra come la generalizzazione delle idee della meccanica seicentesca consenta di sviluppare un formalismo in grado di abbracciare tutta la fisica ottocentesca e novecentesca (il formalismo lagrangiano e hamiltoniano), viene saltato e si perde un anello importante per capire la centralità della meccanica classica rispetto al resto della fisica.
[6] Compendiate per esempio nella sua *Logica come scienza del concetto puro*, Laterza, 1920, specie pag.212 e sgg.

di fisica, etc. Anche in questo caso tuttavia le distinzioni nette sono fuorvianti: la musica, per esempio, richiede indubbiamente un talento naturale, ma consiste anche in un formalismo e una tecnica perfettamente trasmissibili.

In ogni caso, dai programmi dell'ordinamento scolastico secondario, si ricava l'impressione che le discipline in qualche modo riconducibili alla *techné* siano da insegnarsi secondo un'organizzazione logica, mentre quelle riconducibili alla *episteme*, nell'impossibilità di essere trasmesse in maniera oggettivamente replicabile, possano solo essere esemplificate dall'opera degli ingegni consegnati alla storia. Ma questa suddivisione che vede matematica e fisica, per dirne due, relegate fra le aride discipline pratiche, fra le Arti Meccaniche piuttosto che fra le Arti Liberali, è un ossimoro storico: fra le Arti Liberali, nel *quadrivium*, troviamo infatti astronomia, aritmetica, geometria e musica!

Naturalmente non è proponibile di sostituire lo studio della trigonometria con lo studio della storia della trigonometria: una sostituzione tout-court non avrebbe senso. Piuttosto inquadrare lo studio della trigonometria nel suo contesto storico mostrerebbe una disciplina mutata numerose volte, che ha attraversato le epoche, dal mondo ellenistico al mondo islamico e medievale, e che si è intrecciata con l'astronomia e la geografia.

Tutto questo è lungi dall'essere semplice a livello di istruzione secondaria: in questa nota cerchiamo di analizzare la questione in astratto, fornendo un modello concettuale assai semplificato per una disciplina scientifica ed esplorandone, per mezzo di esempi, i possibili modi di impiego. Poiché è difficile esprimere idee realmente nuove in un campo così battuto e dibattuto come quello dei rapporti fra didattica e storia, si cercherà piuttosto di proporre un inquadramento sistematico della questione e, per mezzo di una metafora geometrica, di illustrare in modo sintetico i punti di vista più comunemente diffusi in merito ai benefici di un approccio storico alla didattica delle scienze.

2. LA GEOMETRIA DEL TRIANGOLO CONCETTUALE

Consideriamo una disciplina di studio, per esempio una disciplina scientifica come la geometria, la termodinamica, la genetica, etc. Propongo di considerarne almeno tre aspetti, interconnessi, che mi piace sintetizzare in un *triangolo concettuale*

In questo triangolo ho rappresentato tre aspetti cruciali di una disciplina scientifica: per prima cosa la *teoria* in cui la disciplina è sistematizzata, per capirci l'esposizione logica e generale della teoria stessa; poi abbiamo la *didattica* della disciplina, che codifica la rappresentazione della teoria non nell'ordine logico ma secondo un ordine graduale utile all'apprendimento e alla comprensione del contenuto della teoria; infine abbiamo la *storia* della disciplina, che considera lo sviluppo storico, nel suo contesto culturale di riferimento, della teoria stessa.

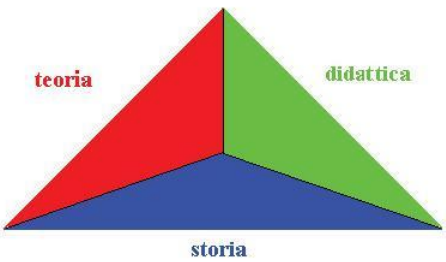
Questi tre livelli sono ovviamente collegati fra loro ma possono facilmente essere distinti: una riprova ne è il fatto che danno solitamente luogo a tre distinti filoni di trattatistica. Da un lato abbiamo i testi di riferimento e a carattere enciclopedico, che servono a spiegare in maniera rapida, generale e il più possibilmente esauriente un argomento; abbiamo poi i testi didattici, concepiti per introdurre un neofita alla teoria, senza magari trattarne tutti gli aspetti, o senza approfondire le nozioni al loro massimo grado di completezza e generalità, ma mettendo per esempio l'accento sugli aspetti intuitivi, sugli esempi e sulle applicazioni. Infine abbiamo i testi che trattano la storia della disciplina.

Ciascuno dei tre lati del triangolo concettuale ha una sua peculiarità e, infatti, le figure professionali che se ne occupano sono distinte: ci sono professionisti della teoria (come per esempio i ricercatori e gli scienziati), professionisti della didattica (i professori ai vari livelli di insegnamento), professionisti della storia (gli storici della disciplina appunto). Le differenze di obiettivo e contesto dei tre lati del triangolo di riverberano anche sui differenti approcci e sulle diverse formazioni dei professionisti che sono orientati su un lato piuttosto che su un altro.

Ovviamente non esistono solo i lati del triangolo, ne esiste anche il contenuto, i punti interni al suo perimetro, che corrispondono a diverse sfumature di ibridazione sia dal punto di vista della disciplina, che della trattatistica che dei professionisti che se ne occupano.

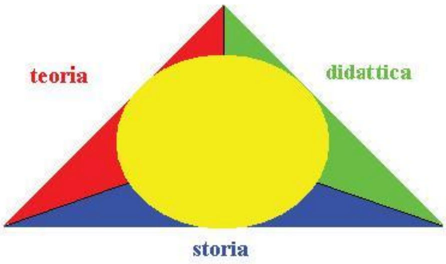
Molti libri di didattica pongono anche l'accento sulla storia, per mezzo di schede o appendici, e lo stesso vale per molti libri di teoria: un classico esempio di libro rigorosamente di teoria ma che contiene delle erudite note storiche è la serie di volumi di Bourbaki sulla matematica pura, le cui note in appendice ai singoli capitoli sono state compendiate in un libro a sé stante, cfr. Bourbaki (1960). Esistono poi trattazioni che cercano di mediare fra teoria e didattica, e così via.

Considerando anche il contenuto, possiamo arricchire il triangolo concettuale come segue:



Nella zona rossa troviamo il rigore e la precisione scientifica, nella zona verde l'intuizione e la motivazione della teoria, nella zona blu le radici e le ramificazioni in altri campi del sapere. O, se si vuole, nel rosso abbiamo il presente, ciò che la teoria è oggi alla luce delle conoscenze attuali, nel blu abbiamo il passato, la storia appunto, nel verde il futuro, dato che solo insegnando, e bene, un argomento possiamo trasmetterlo e farlo progredire verso qualcosa d'altro.

Il punto di equilibrio è l'incentro del triangolo, l'intersezione delle bisettrici: il trattato ideale e definitivo di qualsiasi teoria se esiste, si trova lì, e l'erudito per eccellenza, il dotto al quale rivolgersi senza dubbio per sapere qualcosa (o tutto) della teoria è lì che si colloca. Seguendo l'analogia geometrica, possiamo allora considerare la circonferenza centrata nell'incentro e tangente ai tre lati del triangolo (il cosiddetto incerchio) come la zona in cui i tre aspetti del triangolo concettuale si intrecciano nella maniera più equilibrata e felice, e, di contro, considerare gli spigoli del triangolo come il punto di incontro parziale di almeno due aspetti della disciplina.



Evidentemente è molto difficile collocarsi nella zona centrale del triangolo, tanto per i trattati che per i professionisti: in questa nota ci concentreremo sullo spigolo destro del triangolo, il punto di incontro fra storia e didattica, cercando di esplorarne la simmetria e di capire come, nel reciproco intreccio di questi due aspetti, si possa cercare di convergere verso l'incentro del triangolo concettuale.

Nel farlo, e questo in definitiva ci insegna la metafora del triangolo, non dobbiamo dimenticare che esiste anche un terzo lato, la teoria, che in qualche modo rappresenta il riferimento di ciò che la didattica vuole insegnare e di cui la storia vuole ricostruire lo sviluppo.

3. TEORIA, STORIA E DIDATTICA: FIGURE ESEMPLARI

Per esemplificare le relazioni fra teoria, didattica e storia che abbiamo discusso fin qui considereremo alcune figure esemplari ben note che hanno posto l'approccio storico al centro della loro attività scientifica e didattica.

Come la teoria e storia si possano intrecciare e aiutarsi reciprocamente è mostrato dall'opera di Ernst Mach (1838-1916), il cui celebre libro Mach (1992) contiene una esposizione delle teorie meccaniche analizzate nel loro contesto storico. Le idee di Mach sulla natura della scienza, che hanno dato luogo a forti polemiche ma che hanno avuto una influenza decisiva su molti pensatori del primo Novecento, a partire da Albert Einstein (1879-1955), consideravano la scienza come una "economia di pensiero", una attività volta a rapportare l'uomo col mondo che lo circonda, intendendo con mondo la totalità dei dati sensoriali direttamente accessibili.

Dunque Mach contesta la teoria atomica perché in qualche modo sfugge a questo empirismo critico, e considera la scienza come un fenomeno storicamente determinato. Naturalmente, questa concezione epistemologica gli attirò non solo simpatie ma anche illustri avversari, come Max Planck (1858-1947) che ne contestava la visione puramente empirica della scienza. Si può comunque parlare di un vero e proprio metodo storico nell'attività scientifica di Mach (cfr. Dibattista (2009) pp.45sgg), che partiva dalle teorie emerse storicamente, anzi dall'opera degli scienziati più che dalle teorie intese come sforzo collettivo che travalica luoghi ed epoche, per costruire il proprio pensiero e la propria teoria scientifica elaborando dalle precedenti. In questo senso, teoria e storia sono correlate in una relazione che non vede il primato dell'una nei confronti dell'altra ma un reciproco scambio e, per certi versi, l'appartenenza a un unico tipo di attività intellettuale, che è poi il fare scienza, o meglio lo svilupparla, nell'intendimento di Mach.

Una reciprocità ancora più completa fra storia e teoria si trova nell'opera del fisico francese Pierre Duhem (1861-1916), che si occupò di idrodinamica, elasticità e termodinamica, oltre che di filosofia e storia della scienza, lasciando una monumentale opera, *Le système du monde: histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic*, in dieci volumi pubblicati fra il 1913 e il 1959.

Secondo Duhem, la scienza procede unicamente perché è in grado di utilizzare il bagaglio di conoscenze storicamente accumulato e dunque è nello studio della sua storia che può attingere le idee e gli spunti per progredire, anche nel senso di contrastare le teorie del passato, ma partendo dalla loro conoscenza, dalle loro motivazioni, dal loro sviluppo.

A maggior ragione Duhem sottolinea il valore della storia della scienza per il suo insegnamento, percorrendo quindi tutto il perimetro del triangolo concettuale e collocandosi a buon diritto assai vicino all'incentro, per quanto riguarda la fisica e la meccanica, le discipline che lo hanno visto come ricercatore, storico, filosofo e insegnante. Basterà citare dalle pagine conclusive del suo trattato Duhem (1906), pp.408-409:

> Il metodo legittimo, sicuro, fecondo, per preparare uno spirito a ricevere una ipotesi fisica è il metodo storico. Ripercorrere le trasformazioni tramite le quali il materiale empirico si è incrementato, e la forma teorica si è delineata; descrivere la lunga collaborazione con la quale il senso comune e la logica deduttiva hanno analizzato questo materiale e modellato questa forma fino a che l'una non si è adattata esattamente all'altra, è il modo migliore, anzi il solo metodo, di dare a coloro che studiano la fisica una idea corretta e una visione chiara dell'organizzazione così complessa e così viva di questa scienza.

È interessante osservare come Duhem leghi l'approccio storico alla natura di scienza sperimentale della fisica, e in particolare alla formulazione di teorie sempre più capaci di spiegare i dati sperimentali accumulati col passare del tempo: a riprova di questo, nelle stesse pagine, Duhem sostiene che per la matematica non è così fondamentale la conoscenza storica quanto lo è per la fisica, relegandola al ruolo di "una curiosità legittima ma non essenziale per la comprensione della matematica".

Una figura coeva a Duhem è stato il grande matematico italiano Federigo Enriques (1871-1946), celebre per i suoi contributi alla geometria algebrica delle superficie. Le idee di Enriques in materia di storia della scienza sembrano estendere e generalizzare quelle di Duhem, del quale peraltro non condivideva l'approccio "convenzionalistico" tipico della scuola francese dell'epoca: tuttavia l'approccio storico allo studio delle teorie scientifiche fornisce, secondo il grande matematico livornese, la chiave d'accesso alla comprensione più completa del fenomeno scientifico.

La ricerca di Enriques sconfina non soltanto nel campo della storia, ma anche in quello della filosofia, egemonizzata, in Italia agli inizi del Novecento, dal pensiero di Giovanni Gentile (1875-1944) e Benedetto Croce (1866-1952): quest'ultimo in particolare si scagliò con acrimonia contro le attività di Enriques in campo filosofico, bollando lo scienziato di dilettantismo e trincerandosi dietro un antiscientismo programmatico che abbiamo già avuto modo di stigmatizzare. L'egemonia nel campo della scuola e della cultura della coppia Gentile-Croce chiuse la questione, esplosa in occasione del Congresso Internazionale di Filosofia svoltosi a Bologna nel 1911 e organizzato da Enriques: per una rievocazione della vicenda cfr. il volume di Guerraggio e Nastasi (1993).

Invece Enriques, a nostro avviso, ha buone probabilità di collocarsi nell'incentro del triangolo concettuale per quel che riguarda le scienze esatte: la sua indiscussa genialità e vastità di interessi teorici, la profonda conoscenza della storia della scienza, testimoniata dalle sue importanti opere di storia del pensiero scientifico pubblicate negli anni '30, l'attenzione alle tematiche della didattica non solo universitaria ma anche relativamente all'istruzione secondaria, e soprattutto l'integrazione di tutte queste tre componenti in una visione unica di pensiero forniscono un grandioso esempio di "fare scienza" a tutti i livelli.

L'approccio di Enriques alla didattica è lo stesso utilizzato nel caso della teoria e della storia: da un lato si rifiuta il convenzionalismo propendendo per un contenuto intuitivo, psicologicamente fondato, come fondamento della conoscenza scientifica, dall'altro si guarda alla storia come a una fonte di ispirazione e di esempio. Questo approccio è particolarmente evidente nel celebre manuale scolastico Amaldi, Enriques (1903) che Enriques scrisse con Ugo Amaldi (1875-1957) per l'insegnamento della geometria nelle scuole secondarie, che fu pubblicato nel 1903 e ristampato in edizioni sempre più voluminose fino agli anni '50.

4. INTEGRARE LA STORIA NELLA DIDATTICA

Il connubio fra storia e didattica, si è detto, è stato esplorato a lungo: non è quindi il caso di ripetere in dettaglio i benefici che l'approccio storico può recare all'insegnamento delle scienze, e in particolare della matematica (cfr. e.g. Fauvel, van Maanen (2000), in particolare §7 e relativa bibliografia). Piuttosto va precisato che non si sta parlando qui dello studio della storia di una disciplina scientifica da affiancare alla disciplina stessa, obiettivo che è di facile realizzazione in ambito universitario ma che per varie esigenze è chiaramente dispersivo nell'insegnamento secondario, ma di far pesare l'approccio storico nella comprensione degli argomenti, specie se, come nel caso della matematica, è importante fornire concretezza e motivazioni per l'introduzione dei concetti teorici. D'altra parte uno studio effettivo della storia della scienza presuppone delle conoscenze scientifiche, il che sembra implicare che il modo migliore di introdurre la storia della scienza è di *integrarla* nell'insegnamento della disciplina teorica.

Naturalmente esistono anche i detrattori dell'approccio storico, la cui critica è sostanzialmente basata sulla differenza che esiste fra una disciplina scientifica e la storia di quella disciplina: studiare la storia della scienza, si dice, è altro che studiare la scienza, si tratta di materie distinte quanto la matematica e la filosofia nei corsi di educazione secondaria (la cui dicotomia, per inciso, è una finzione moderna: basti pensare all'intreccio fra il pensiero platonico e il pensiero geometrico antico).

Inoltre si obietta che spesso lo studio storico di un argomento scientifico potrebbe confondere lo studente, che non ha gli strumenti critici né per far corrispondere il linguaggio scientifico del passato con quello del presente né per discernere gli elementi presenti nell'esposizione storica ma che non sono confluiti nella forma finale della teoria.

Infine da più parti si mette in luce che, seppure l'integrazione dello studio di una materia scientifica con lo studio della sua storia possa avere dei vantaggi, questi vengono vanificati dal maggior tempo impiegato nell'insegnamento, dalla scarsità di risorse e ausili didattici a disposizione di insegnanti e studenti e dalle problematiche di formazione del corpo docente.

Viceversa, nei prossimi paragrafi fornirò alcuni esempi per ciascuno dei seguenti argomenti che, fra i molti possibili, mi paiono particolarmente interessanti per quanto riguarda l'apporto che la storia della scienza può dare alla didattica. Va sottolineato come questi argomenti riguardino in primo luogo i discenti ma in parte anche i docenti: è stato più volte rilevato come lo studio della storia della scienza possa fornire nuovi spunti e riaccendere interesse per la materia che si sta insegnando anche nei docenti.

- *Umanizzazione e storicizzazione della scienza*: legare una materia tecnica e astratta, che quindi potrebbe risultare arida, al mondo umano e in particolare allo sviluppo storico, contribuisce da un lato a "umanizzare" un argomento a prima vista scollegato da qualsiasi attività pratica, dall'altro a inquadrarlo in un contesto di pensiero. In particolare è stato più volte osservato come legare una nozione scientifica a un aneddoto e a dei personaggi storici possa rendere più attraente lo studio, fornendo una spinta emotiva dovuta alla curiosità.
- *Motivazione e strutturazione dei risultati scientifici*: fornire delle motivazioni storiche e umane per l'introduzione dei concetti teorici illustra come questi ultimi siano il prodotto di un processo di pensiero, che può aver coinvolto molti individui diversi, e non entità atemporali concepite esattamente nel modo col quale sono espresse nella trattatistica teorica. In particolare la comprensione di un risultato scientifico può essere facilitata dall'analisi della "storia dei tentativi" che hanno contribuito a generarlo.
- *Provvisorietà dei paradigmi scientifici*: mostrare come la scienza sia una attività in divenire, soggetta a mutamenti, mode, e anche condizionamenti politici, può contrastare l'immagine di cristallino dogmatismo che necessariamente emerge dalla trattatistica teorica, che presenta le nozioni organizzate secondo uno schema logico che è in realtà mutevole e non fissato una volta per tutte. In particolare la comprensione della complessità

dell'attività scientifica e l'idea che la scienza non procede in maniera lineare e senza interruzioni può essere sfatata analizzando l'avvicendarsi delle idee scientifiche poste a fondamento della spiegazione di un certo fenomeno o, nel caso delle scienze esatte, delle generalizzazioni e successive ramificazioni cui uno stesso concetto può aver dato luogo.

Nei prossimi paragrafi fornisco alcuni esempi tratti da capitoli classici e ben noti della storia della scienza, per cercare di illustrare i punti precedenti nell'ottica della didattica.

5. UMANIZZAZIONE E STORICIZZAZIONE DELLA SCIENZA

La scienza è indiscutibilmente un fenomeno umano: sebbene il suo scopo sia sostanzialmente di formulare in un quadro il più possibile unitario dei principi generali di comprensione quantitativa della realtà, o meglio di vari aspetti della realtà, è il prodotto di una impresa umana e collettiva. Vale la pena di sottolineare entrambi gli attributi: umana in quanto le persone che contribuiscono al progresso scientifico, per geniali o eccentriche che siano, sono *uomini in carne e ossa*[7] a tutti gli effetti; collettiva in quanto non è possibile progresso scientifico nell'isolamento, e la scienza non può prescindere dalla comunicazione, sia fra ricercatori coevi ma distanti nello spazio, sia fra generazioni che si passano idee, problemi, soluzioni.

Come è possibile utilizzare la storia della scienza in questo senso? La risposta più semplice è data dall'inserimento di notizie e aneddoti sugli scienziati che hanno contribuito alla nozione in esame. Tuttavia, questa maniera tutto sommato agiografica di inserire elementi storici nella narrazione didattica può anche essere controproducente se non è svolta in maniera critica. Per esempio, a nostro avviso un grande beneficio viene dall'illustrazione degli errori e delle difficoltà degli scienziati nel formulare e comprendere i concetti esposti in maniera così immediata e chiara nei libri di testo, errori e difficoltà che spesso si replicano "in piccolo" nell'apprendimento degli studenti. Capire che un concetto complicato non può essere compreso immediatamente nemmeno dallo scienziato che lo ha consegnato alla storia può sollevare lo studente dalle ansie dovute alle difficoltà e fornire fiducia e motivazione.

[7] Nel primo capitolo del suo *Del sentimiento trágico de la vida*, (1912) Miguel de Unamuno (1864-1936) sostiene che lo studio di una teoria filosofica non può prescindere dallo studio della biografia del filosofo che l'ha prodotta.

Charles Darwin (1809-82) è giunto all'idea della selezione naturale, che costituisce il cuore della sua teoria dell'evoluzione, principalmente analizzando i dati e le esperienze fatte durante il suo celebre viaggio intorno al mondo a bordo del *Beagle*, ma anche ispirandosi alle teorie economico-politiche di Thomas Maltus (1766-1834). La maturazione del principio della selezione naturale ha quindi richiesto molti anni, cinque soltanto spesi a bordo del brigantino. Il diario di Darwin, da collegarsi alle sue pubblicazioni, prima fra tutte l'*Origine delle specie*[8] (1859), offre una panoramica dell'evoluzione (è il caso di dirlo) dell'idea di selezione naturale, che fornisce il vero contributo del grande naturalista inglese alla teoria evolutiva[9].

Uno studio della teoria dell'evoluzione non sembra poter prescindere dal suo sviluppo storico: da un lato il confronto con teorie precedenti, che in parte hanno in seguito dato vita a nuove idee come il lamarckismo, la cui versione settecentesca data da Jean-Baptiste Lamarck (1744-1829) si è rivelata erronea, alla luce dei primi studi sperimentali di genetica, e che tuttavia sembra aver precorso anche il concetto di *soft inheritance* nell'ambito della moderna epigenetica (cfr. e.g. Jablonka, Lamb (2005)). D'altra parte la "coincidenza" della scoperta pressoché contemporanea del meccanismo evolutivo da parte di Darwin e Wallace costituisce una convergenza tutt'altro che atipica, che serve a evidenziare come le idee scientifiche tendono a prodursi esattamente in certe circostanze storiche e geografiche.

Infine le polemiche seguite alla pubblicazione della teoria di Darwin e Wallace, polemiche il cui eco si fa sentire ancora oggi, non possono non essere considerate una parte essenziale per comprendere l'importanza e anche i concetti della teoria dell'evoluzione.

Direi che in questo caso è impossibile per la scienza ignorare la sua storia, specie a seguito delle controversie che, incredibilmente, la teoria dell'evoluzione continua a suscitare nell'insegnamento, in particolare in alcuni paesi come gli Stati Uniti e la Turchia[10]. Storicizzare la questione può forse servire anche a comprendere le resistenze

[8]Tutte le opere di Darwin, nelle varie edizioni e col corredo di molte traduzioni "d'epoca", si possono reperire sul sito http://darwin-online.org.uk/.
[9]Ricordiamo infatti che Alfred Russell Wallace (1823-1913) giunse in modo indipendente e nello stesso periodo alla teoria dell'evoluzione darwiniana, con dei distinguo a proposito del meccanismo di selezione naturale.
[10]Cfr. l'impressionante analisi in Miller, Scott, Okamoto (2006).

pregiudiziali che una teoria scientifica ormai consolidata può incontrare nella sua affermazione al di fuori della cerchia scientifica.

Un aspetto assolutamente salutare dello studio della scienza è l'accumulo della memoria storica degli errori scientifici e delle teorie che, rimaste per qualche tempo in auge, si sono poi rivelate erronee. Tralasciando l'evidente importanza filosofica di questo aspetto della storia della scienza, basti pensare al ruolo delle anomalie e delle crisi dei paradigmi scientifici nella concezione kuhniana dello sviluppo della scienza, è fondamentale per rendere conto dell'elemento umano dietro una teoria scientifica considerare gli errori che hanno portato a quella teoria, per non ingenerare il falso mito di una scienza che procede per accumulo incontrastato di conoscenza.

Esistono moltissimi esempi che illustrano come una teoria affermata abbia alla fine mostrato delle crepe tali da farla crollare, per esempio la teoria dell'etere crollata sotto le evidenze della relatività ristretta di Einstein. Ma è anche importante annotare i veri e propri falsi che hanno costellato la storia della scienza non meno che la storia dell'arte.

Un esempio tipico è la vicenda dell'uomo di Piltdown, paradigmatico per illustrare come un intero gruppo di scienziati affermati possa sbagliare clamorosamente sulla base di considerazioni derivanti dal contesto e non prettamente scientifiche.

Agli inizi del Novecento la conoscenza sull'evoluzione umana si basava sostanzialmente su tre tipi di fossili: l'Uomo di Cro-Magnon (anatomicamente come noi) rinvenuto in Francia, l'Uomo di Neanderthal (*Homo neanderthalensis*), rinvenuto in varie località di Germania e Belgio, e il "Pitecantropo" o Uomo di Giava (*Homo erectus*), il cui primo esemplare fu rinvenuto nel 1891 da Eugéne Dubois (1858-1940), e del quale sarebbero stati scoperti numerosi altri fossili in Cina negli anni '20. Con grande sconforto della comunità scientifica britannica, non erano stati invece rinvenuti fossili nelle isole britanniche.

Tuttavia, fra il 1908 e il 1912, furono ritrovati a più riprese frammenti ossei di un cranio la cui mandibola era chiaramente scimmiesca, mentre il teschio sembrava umano. All'epoca non era uso praticare i protocolli attuali per l'estrazione di fossili da un sito, ma lo stesso valeva per i fossili precedenti. Solo nel 1953 fu definitivamente stabilito che si trattava di un falso, composto combinando ad arte un teschio umano medievale, una mandibola di orango e denti fossili di scimpanzé.

Il lato sorprendente della vicenda è che insigni antropologi inglesi scommisero la loro reputazione sull'uomo di Piltdown, trascinati da pregiudizi nazionalisti, nel nome di una supposta (e infatti falsa) origine europea dell'Uomo: il più notevole studioso travolto dalla burla fu Sir Arthur Keith (1866-1955), le cui opere sono un ottimo esempio di come i pregiudizi di un'epoca, il tardo vittorianesimo coloniale, possano influenzare il talento di uno scienziato. In particolare è degno di nota che Keith rifiutò di considerare il cranio (autentico) di *Australopithecus africanus* rinvenuto da Raymond Dart (1893-1988) nel 1925 in Sud Africa come un antenato dell'uomo, considerandolo invece come una scimmia fossile, salvo doversi poi ricredere quando negli anni '40 Robert Broom (1866-1951) scoprirà numerose altre testimonianze di australopitecine in Sud Africa.

Trattandosi di personalità scientifiche dal talento indiscusso, l'unica spiegazione del falso di Piltdown, durata per quaranta anni, è il contesto: gli scienziati sono, ripetiamo, uomini in carne e ossa, con le loro convinzioni e pregiudizi, influenzati dalle mode del tempo oltre che dall'educazione e dai casi della vita. Nell'ambiente ancora colonialista, nazionalista ed eurocentrico di inizio secolo non era difficile presumere che l'origine dell'Uomo dovesse ricercarsi nella propria madre patria e non nelle colonie.

6. MOTIVAZIONE E STRUTTURAZIONE DEI RISULTATI SCIENTIFICI

Una nozione scientifica, per esempio un teorema, tende a essere considerata per come viene esposta nel trattato dal quale la si sta apprendendo: di solito viene introdotta con una motivazione di ordine logico, ed illustrata con esempi contestualizzati per quella motivazione. Per esempio il teorema di Pitagora di norma viene studiato nel contesto degli elementi della geometria piana, esposta in modo sintetico nei manuali scolastici: il suo legame con la teoria dei numeri e con la nozione di distanza rimane completamente nascosto in questo tipo di trattazione.

Collocare un risultato scientifico nel flusso di pensiero che lo ha generato e nel quale si è mutato, e come vedremo nel caso del teorema di Pitagora questo flusso travalica le epoche, consente non solo di fornire motivazioni ulteriori per l'importanza del risultato al di là dell'ordine logico nel quale la teoria che lo contiene viene esposta, ma anche di dare sostanza, struttura, di estenderlo lungo la dimensione temporale e consentire di valutarne l'importanza anche dalla sua occorrenza in epoche e luoghi diversi.

Il teorema di Pitagora compare per la prima volta, nella geometria greca, negli *Elementi* di Euclide, come quarantasettesima proposizione del primo libro (cfr. Caressa (2012), §5): la tradizione ellenistica, specie quella tarda, lo attribuisce alla figura semi-mitica di Pitagora, filosofo ionico e fondatore di una setta religiosa nella Magna Grecia. Tuttavia le uniche fonti che ci parlano del filosofo di Samo sono molto tarde rispetto all'epoca in cui sarebbe vissuto, il IV secolo a.C.: per esempio ne parlano Vitruvio (I sec. a.C.), Diogene Laerzio (II-III sec d.C.), Giamblico (III-IV sec. d.C.), Proclo (V sec. d.C.), etc.

Nei manuali moderni, quando viene dimostrato, il teorema di Pitagora è presentato sostanzialmente nello stesso contesto nel quale lo troviamo presentato da Euclide, sebbene la dimostrazione euclidea sia spesso omessa, o sostituita con altre ritenute più semplici ma che fanno sempre appello al primo teorema di Euclide sui triangoli rettangoli[11], che negli *Elementi* figura come ottava proposizione del sesto libro. Tutto questo rende il teorema di Pitagora da un lato un corollario del teorema di Euclide, dall'altro un qualsiasi teorema sui triangoli rettangoli la cui fama è forse dovuta soltanto al nome dell'illustre filosofo ionico.

Tuttavia questo risultato ha una storia lunghissima, che affonda le radici nella preistoria. Per accennarvi, è necessario collegare il teorema al concetto di *terna pitagorica*: quest'ultima è una terna di interi positivi (a, b, c) tali che $a^2 + b^2 = c^2$; per esempio (3, 4, 5) è una terna pitagorica, mentre (4, 5, 6) non lo è. Negli *Elementi* di Euclide figura un algoritmo per generare tutte le terne pitagoriche, che sono infinite. Ovviamente una terna pitagorica determina le lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo.

Le terne pitagoriche fanno la loro comparsa almeno milleduecento anni prima di Pitagora, dato che una lista di tali terne compare in una tavoletta cuneiforme babilonese dell'epoca del re Hammurabi (XVIII sec a.C.), cfr. Caressa (2012) §2. Alcuni studiosi sono persino giunti a sostenere che le terne pitagoriche erano utilizzate in epoca preistorica nella costruzione di circoli megalitici nel centro Europa, una tesi che non trova riscontri precisi e che viene generalmente considerata insostenibile (cfr. Caressa (2012) §1), sebbene recentemente alcune precise misurazioni sembrino attestare che il circolo di Stonehenge contenga simmetrie basate su alcune terne pitagoriche (cfr. Kaizinger (2011)).

[11] In un triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo di lati l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa.

Le terne pitagoriche figurano anche nei testi indiani chiamati *Shulbas sutras*, redatti fra l'VIII e il II secolo a.C., che contengono prescrizioni di natura religiosa e rituale, in particolare per quel che concerne le dimensioni degli altari: oltre alle terne pitagoriche, in questi antichi testi troviamo anche l'enunciato del teorema di Pitagora (cfr. Caressa (2012) §3). Poiché il termine *Shulbas sutras* allude alle regole per tendere delle corde, sembra naturale pensare che la scoperta del teorema per i triangoli rettangoli sia avvenuta in maniera "empirica" magari poggiando su prove fatte utilizzando le terne pitagoriche.

Dunque la storia del teorema di Pitagora sembra percorrere le epoche e i secoli: sicuramente i Babilonesi conoscevano le terne pitagoriche e forse avevano un algoritmo per costruirle, e conoscevano anche il teorema di Pitagora nella sua forma geometrica, in quanto lo troviamo utilizzato nella soluzione di alcuni problemi di calcolo di aree e lunghezze; gli Indiani, almeno un millennio appresso, utilizzavano non solo le terne ma anche il teorema di Pitagora, che ritroviamo nei testi cinesi, per esempio nel *Zhou bi suan jing* (I sec. a.C.), un trattato di astronomia che contiene una dimostrazione esemplificata dalla figura seguente, che illustra il teorema nel caso di un triangolo di lati (3, 4, 5) corrispondente a una terna pitagorica appunto.

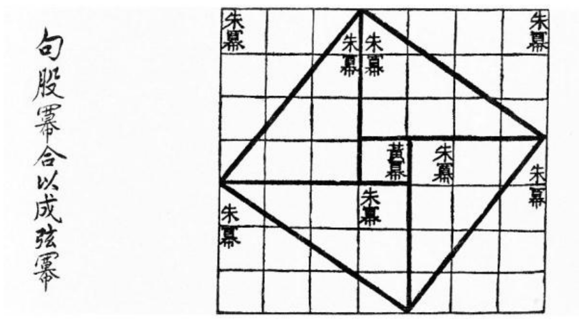


Figura 1 Illustrazione del teorema di Pitagora per il triangolo di lati (3; 4; 5) dal Zhou bi suan jing.

Il quadrato interno, i cui lati sono in grassetto, è quello costruito sull'ipotenusa 5 e ha area $5^2 = 25$, mentre il quadrato esterno ha come lato la somma dei lati dei cateti 3 e 4, cioè ha area $(3 + 4)^2 = 49 = 25 + 24$, cioè pari all'area del quadrato interno più 4 volte l'area $6 = (3 \times 4) / 2$ del triangolo, come si vede dalla figura. Dunque $25 + 4 \times (3 \times 4) / 2 = (3 + 4)^2 = 3^2 + 4^2 + 2 \times (3 \times 4)$ che fornisce la relazione pitagorica $5^2 = 3^2 + 4^2$: il ragionamento è valido per qualsiasi triangolo rettangolo. Il teorema di Pitagora viene chiamato teorema del *gou-gu* (cioè dello gnomone) nella matematica cinese e ricorre anche nei testi seguenti, come i famosi *Nove capitoli dell'arte matematica*, cfr. Caressa (2012) §7.

Una "dimostrazione grafica" ancora più immediata, basata sempre sull'equivalenza di aree, la si deve al matematico indiano Bhaskara II (1114-85 ca.) ed è illustrata nella figura 2. Come si vede il quadrato a destra ha come lato l'ipotenusa del triangolo, e contiene un quadrato centrale che ha come lato uno dei cateti; la figura a sinistra mostra come, spostando i triangoli e il quadrato centrale, si ottiene un'area pari alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

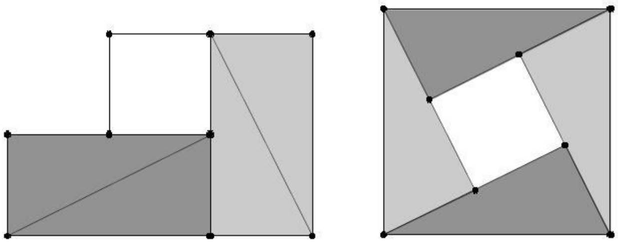


Figura 2 Dimostrazione di Bashkara del teorema di Pitagora.

Abbiamo ripercorso in qualche dettaglio la storia del teorema di Pitagora al di fuori del mondo greco, per mostrare come le dimostrazioni asiatiche, per esempio, basate sulle equivalenze di aree siano sicuramente più intuitive, e anche facilmente riconducibili a espressioni algebriche, rispetto alle costruzioni classiche della geometria ellenistica. Inoltre la relazione con le terne pitagoriche apre uno spiraglio sulla teoria elementare dei numeri, tanto per dirne una il celebre teorema di Fermat è una naturale generalizzazione del concetto di terna pitagorica.

Utilizzare elementi di questa storia e mostrare come uno stesso enunciato è suscettibile di motivazioni e dimostrazioni alternative fiorite presso culture lontane fra loro nel tempo e nello spazio è probabilmente il miglior modo di rendere conto del fatto che il teorema di Pitagora è una delle proposizioni fondamentali e fondanti dell'intera geometria, e che merita per intero la sua fama.

7. PROVVISORIETÀ DEI PARADIGMI SCIENTIFICI

L'ultimo aspetto che vogliamo evidenziare a proposito di una integrazione storica delle nozioni scientifiche impartite nell'insegnamento, non solo secondario ma in questo caso anche universitario, è la salutare iniezione di umiltà che viene inoculata dallo studio delle teorie del passato che non hanno resistito al vaglio di esperimenti più precisi, come nel caso della meccanica newtoniana rispetto alla relatività o alla meccanica quantistica, o di teorie che consentivano una interpretazione più completa dei dati esistenti, come la teoria copernicana rispetto alla teoria tolemaica. La storia della scienza, che sia vista come un incrementale accumulo di nozioni e scoperte, o un processo sottoposto a "salti" improvvisi[12], consente in qualche senso di prendere le misure alle teorie scientifiche, calandole in un contesto e fornendole di inizio e fine: l'idea di una teoria definitiva non esiste nemmeno in matematica, anche se in questo caso più che sovvertire le teorie del passato è comune estenderle e generalizzarle, come nel caso della scoperta della geometria non euclidea, che non ha invalidato la geometria euclidea, bensì ha invalidato la concezione filosofica e pregiudiziale che la vedeva come l'unica geometria possibile.

Ogni teoria scientifica soggiace a una visione del mondo che, retroattivamente, contribuisce a consolidare, fondare o anche distruggere. La meccanica intesa come scienza dei corpi in movimento, eretta a sistema scientifico da Galileo e Newton, ha contribuito a delineare il paradigma determinista che ha dominato la scienza fino a tutto il secolo XIX: impostosi in maniera coerente e cosciente nel Settecento, si pensi alle celebri affermazioni di Pierre Simon de Laplace [13] (cfr. Caressa (2010) §1.4), il determinismo si è esteso da concezione filosofia della meccanica a paradigma di interpretazione della realtà estendendosi a tutta la scienza in maniera così pervasiva che nemmeno l'affermazione delle correnti romantiche in letteratura e filosofia riuscirono a scalfirne il successo come chiave di interpretazione della realtà.

Ogni teoria ottocentesca per avere pretese di scientificità doveva essere deterministica, perché si pensava che la natura stessa lo fosse. Per questo motivo quando Albert Einstein rivoluzionò la concezione del tempo e dello spazio, un punto di non ritorno nella storia del pensiero scientifico e filosofico, con la teoria della relatività ristretta (1905) e più grandiosamente con la teoria della relatività generale (1916), continuò a muoversi nel solco della concezione deterministica della natura: la sua teoria estende la teoria di Galileo-Newton, che ne diviene un caso particolare valido entro i margini

[12] O un ragionevole mix fra questi due aspetti, cfr. Infeld (1972), p.16.

[13] "Una intelligenza che, a un dato istante, conosca tutte le forze che animano la natura, la posizione rispettiva degli enti che la compongono, se fosse così vasta da sottoporre questi dati all'analisi [matematica], abbraccerebbe nella medesima formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo, e quelli dei più effimeri atomi. Nulla sarebbe incerto per essa, e sia l'avvenire sia il passato sarebbero presente ai suoi occhi", cfr. *Essai philosophique sur les probabilités*, 1814, p.3.

sperimentali del mondo macroscopico[14]. Tant'è che per lanciare razzi e satelliti nello spazio si utilizza la teoria newtoniana, e il problema fondamentale del mondo, vale a dire la stabilità del sistema solare, si formula sempre usando la teoria newtoniana nella sua versione settecentesca. La relatività generale fa invece sentire i suoi effetti dove sono presenti velocità relativistiche, come nella comunicazione GPS, o distanze cosmiche, come nello studio delle stelle *pulsar* binarie (cfr. Doplicher (2010)).

Ma agli inizi del Novecento, la convergenza di istanze sperimentali e teoriche rese insostenibile la concezione deterministica per la meccanica dell'infinitamente piccolo: non ci addentreremo nella complicata storia degli albori della meccanica quantistica, ma ci contentiamo per il momento di osservare come si tratti di una rivoluzione non solo nel campo scientifico ma anche per quanto riguarda l'intera concezione del mondo, un cambiamento di paradigma paragonabile alla rivoluzione copernicana. In effetti molti concetti della fisica quantistica sono "contro-intuitivi", esattamente come ci pare strano pensare al fatto che la Terra si muova intorno al Sole mentre ci appare evidente esattamente il contrario. Fu soltanto nel 1925, dopo un ventennio di ricerche, che l'inconciliabile natura non deterministica, o per essere più precisi, intrinsecamente probabilistica, della nuova meccanica emerse, con il celebre lavoro di Werner Heisenberg (1901-76), col quale veniva sancito il suo principio di indeterminazione, una legge intrinseca nella natura delle cose osservabili, completamente nuova rispetto a tutto quello che la fisica e le scienze naturali in generale avevano concepito nei secoli del predominio determinista.

Uno dei più istruttivi e noti esempi di quanto la visione del mondo di uno scienziato possa influenzarne non solo l'interpretazione della realtà ma anche l'attività scientifica è dato dalla reazione di Einstein alla teoria quantistica: da un lato, nel periodo più fecondo della sua carriera di ricercatore, Einstein contribuì alla teoria dei quanti con il suo geniale articolo del 1905 nel quale proponeva l'esistenza del fotone per spiegare l'effetto fotoelettrico, esistenza confermata nel 1919 che gli valse il Nobel per la fisica nel 1921 (cfr. Einstein (1972)). D'altro canto l'interpretazione della teoria dei quanti proposta da Niels Bohr (1885-1962) e della sua scuola di Copenhagen trovarono l'opposizione di Einstein, che era già stato profondamente turbato dal principio di Heisenberg, una cui conseguenza era la rinuncia alla descrizione spazio-temporale dei

[14]Il limite sperimentale della legge di gravitazione newtoniana è di un millimetro: sotto questa dimensione non è noto se sia ancora valida, cfr. Doplicher (2010).

fenomeni fisici (almeno di quelli su scala microscopica) sostituendo la geometria dello spazio-tempo con l'algebra non commutativa degli operatori nello spazio di Hilbert[15] (cfr. Heisenberg (1978)).

Lo scontro fra Einstein e i fondatori della fisica quantistica non riguarda i singoli risultati, ma la rinuncia al paradigma scientifico classico, la descrizione deterministica dei fenomeni usando la geometria dello spazio-tempo e il principio di causalità[16]: malgrado lo stesso Einstein, con la sua teoria della relatività, avesse abbattuto l'idea di uno spazio-tempo assoluto che persisteva dai tempi di Newton, la sua proposta alternativa restava sempre nelle linee del paradigma classico.

La contrapposizione fra Einstein e il paradigma cui soggiace la meccanica quantistica e la sua interpretazione non è semplicemente una questione di gusti personali o una semplice disputa filosofica, ma è alla base della principale questione aperta della fisica contemporanea, vale a dire la conciliazione, e possibilmente l'unificazione, di relatività e fisica quantistica, due teorie che hanno ottenuto delle spettacolari conferme sperimentali ma che sembrano irrimediabilmente incoerenti l'una con l'altra[17].

La polemica Bohr-Einstein è dunque preziosa da un lato per evidenziare la differenza fra una teoria scientifica e il paradigma di pensiero che le fa da contorno, dall'altro per mostrare come scienziati che studiano, apparentemente, la "stessa" realtà possono dare luogo a teorie scientifiche ineccepibili e corrette, nei propri ambiti di validità empirica, ma irriducibilmente inconciliabili.

BIBLIOGRAFÍA

AMALDI, U., ENRIQUES, F. (1903): *Elementi di geometria*. Bologna: Zanichelli.

[15]Heisenberg ragionava in termini di matrici infinite, cioè operatori su uno spazio di serie convergenti, mentre Erwin Schrödinger (1887-1961) mostrò nel 1926 come formulare la teoria in termini di operatori su uno spazio di funzioni sommabili: l'equivalenza delle due teorie segue dall'isomorfismo dei relativi spazi di Hilbert, un teorema standard di analisi funzionale.

[16]Nel suo carteggio con Max Born (1882-1970), Einstein scrive in una lettera datata 29 aprile 1924 (cfr. Born, Einstein (1973), p.98): "Le idee di Bohr sulla radiazione mi interessano molto, ma non vorrei lasciarmi indurre ad abbandonare la causalità rigorosa senza aver prima lottato in modo assai diverso da come s'è fatto finora. L'idea che un elettrone esposto a una radiazione possa scegliere liberamente l'istante e la direzione in cui spiccare il salto è per me intollerabile. Se così fosse preferirei fare il ciabattino, o magari il croupier, anziché il fisico". In una lettera datata 4 dicembre 1926 figura la famosa frase (cfr. Born, Einstein (1973), p.109): "La meccanica quantistica è degna di ogni rispetto, ma una voce interiore mi dice che non è ancora la soluzione giusta. È una teoria che ci dice molte cose, ma non ci fa penetrare a fondo il segreto del gran Vecchio. In ogni caso, sono convinto che questi non gioca a dadi col mondo".

[17]Einstein formulò la sua principale obiezione alla fisica quantistica nel cosiddetto paradosso di Einstein-Podolski-Rosen, cfr. Doplicher (2010).

BORN, M., EINSTEIN, A. (1973): *Scienza e vita. Lettere 1916-1955*, Boringhieri, Torino, tr. it. di *Briefwechsel 1916-1955*, Nymphenburger, München, 1969.

BOURBAKI, N. (1960): *Éléments d'histoire des mathématiques*. París: Hermann.

BREWSTER, D. (1855): *Memoirs of the Life, Writings, and Discoveries of Sir Isaac Newton*, vol.1, Edimburgo: Thomas Constable & Co.

CARESSA, P. (2010): *Piccola storia della matematica, 2*. Milano: Alphatest.

CARESSA, P. (2012), *Piccola storia della matematica,1* . Milano: Alphatest.

DIBATTISTA, L. (2009): *Storia della scienza e didattica delle discipline scientifiche*. Roma: Armando.

DOPLICHER, S. (2010): Scienza e conoscenza, etica e cultura: la prospettiva della fisica, *La Matematica nella Società e nella Cultura*, 3, 271-309.

DUHEM, P. (1906) : *La théorie physique, son objet, sa structure.* París : Chevalier & Riviére.

EINSTEIN, A. (1972): *Teoria dei quanti di luce*, Newton-Compton, Roma, tr. it. di *Die Hypothese der Lichtquanten.* Stuttgart: Battenberg. 1965.

FAUVEL, J., van MAANEN, J. eds. (2000): *History in mathematics education: An ICMI study*. Berlin: Springer.

GUERRAGGIO, A., NASTASI, P. eds. (1993): *Gentile e i matematici italiani. Lettere 1907-1913.* Torino: Boringhieri.

HEISENBERG, W. (1978): *Mutamenti nelle basi della scienza*, Boringhieri, Torino, tr. it. di *Wundlungen in den Grundlagen der Naturwissenschaft*. Stuttgart: Hirzel. 1959.

INFELD, L. (1972): *Introduzione alla fisica moderna*, Editori Riuniti, Roma, trad. it. di *Nowe Drogi Nauki*. Warszava: Mathesis Polska. 1957.

JABLONKA, E., Lamb, M. (2005): *Evolution in Four Dimensions. Genetic, Epigenetic, Behavioral, and Symbolic Variation in the History of Life.* Cambridge: MIT Press.

KAINZINGER, A. (2011): The mathematics in the structures of Stonehenge, *Arch. Hist. Exact Sci.* 65, 67-97.

MACH, E. (1992), *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico*, Boringhieri, Torino, tr. it. di *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch-dargestellt*. Leipzig, 1883.

MILLER, J.D., SCOTT, E.C., OKAMOTO, S. (2006), Public acceptance of evolution, *Science*, 313, 765-766.

TUTORIA GUIADA: UMA PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA PARA EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA PLANA COM PRESSUPOSTOS NA AUTONOMIA DO ALUNO

Diego Lieban, Daiane Pertile e Angelica Pierozan[18]

IFRS - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO SUL, CâmpusBentoGonçalves (RS, BRASIL)

RESUMEN:

La geometría, tal como es trabajada habitualmente, no permite que el alumno comprenda significativamente lo que ve. Por eso, sentimos la necesidad de introducir en las prácticas docentes la utilización de mecanismos que faciliten la comprensión del alumno. En este artículo, presentamos un proyecto de investigación cuyo objetivo es utilizar el software GeoGebra en la resolución de problemas de geometría y evaluar cómo elementos de interacción propuestos en los archivos creados por los autores pueden contribuir en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Aunque la experimentación llevada a cabo aún es pequeña, los alumnos manifiestan una valoración positiva hacia los recursos tecnológicos, sobre todo en cuanto a la ayuda que suponen en la visualización de las cuestiones propuestas.
Palabras Clave: Práctica docente; GeoGebra; Geometria; Interactividad.

ABSTRACT:

Geometry as is usually worked does not allow the student to have a meaningful understanding of what he see. So there is necessary to introduce in teaching practices using mechanisms that can facilitate student understanding. In this article, we present a research project with the goal of using GeoGebra software in solving problems of geometry and evaluate how interaction elements proposed in files created by the authors can contribute to the process teaching and learning of mathematics. The experimentation of this work is still small, but it signals a positive manifestation of students with technology resources, especially by helping them better visualize the proposed issues.
Keywords: Teaching practice; GeoGebra, geometry, Interactivity.

8. INTRODUÇÃO

[18] diegolieban@yahoo.es, daiane.pertile@bento.ifrs.edu.br, angelica.pierozan@bento.ifrs.edu.br

Observa-se hoje – a partir da vivência das coautoras como alunas recentemente egressas do Ensino Médio da rede pública – que grande parte dos professores de Matemática da Educação Básica e Superior, embora reconheçam a importância do uso de *softwares*enquanto possibilidade para o ensino de vários conteúdos, ainda não tem, muitas vezes, domínio instrumental suficiente da tecnologia para desenvolverem suas práticas. Ou seja, não basta apenas o professor disponibilizar de ferramentas se a aplicação delas não for pensada e estudada previamente. Para se trabalhar com um programa, há a necessidade de estar seguro quanto a sua aplicação. Existem muitos *softwares* disponíveis, porém é necessário escolhê-los adequadamente de acordo com o planejamento previsto, seja pelo conteúdo a ser abordado, pelo tempo reservado para a atividade, pelo domínio (da ferramenta ou conteúdo) da turma ou por qualquer outro fator que possa interferir direta ou indiretamente na condução da proposta. Buscamos, assim, oferecer aos professores de matemática, através deste artigo, alguns conhecimentos fundamentais sobre o *software* Geogebra, bem como apresentar uma alternativa didática que possa contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de geometria na Educação Básica. Dentro desta proposta, estabelecemos, como princípio, que a atividade pensada tenha, dentro das possibilidades, um caráter de interatividade que seja capaz de incitar, de alguma forma, o aluno participante, ao mesmo tempo que valorize sua autonomia, como será discutido mais adiante.

A escolha pelo trabalho com GeoGebra fez-se por acreditar que ele potencializa o aprendizado do aluno, uma vez que tem interface acessível e atraente, com menus interativos e dá condições de construções dinâmicas, ou seja, as ações do lápis, borracha, régua e compasso são levadas com precisão para a tela do computador e, tão rapidamente quanto dispor objetos na área de trabalho, você pode retirá-los. Contudo, é fundamental que reforcemos sempre a reflexão sobre os papéis do professor e do aluno diante da tecnologia: nem deixar o aluno liberto demais (a ponto de sentir-se desassistido), nem fazer por ele as etapas que contribuam significativamente para o seu aprendizado (instruindo com uma série de "passo a passo", por exemplo).

9. **CONHECENDO O GEOGEBRA**

O GeoGebra é um software livre que permite combinar conceitos de geometria e álgebra em um mesmo espaço. Foi criado por Markus Hohenwarter para ser utilizado, entre outros, no ambiente de sala de aula. O programa permite realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos, etc., assim como permite inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente. Equações e coordenadas também podem ser inseridas através de sua barra de comandos. O GeoGebra possui duas janelas de trabalho: a janela de visualização e a janela de álgebra. A janela de visualização é onde os objetos são construídos, nela é possível construir objetos, medir ângulos, distâncias, trabalhar com retas paralelas, tangentes, com bissetrizes, vetores e outras elementos diversos que constituem o aprendizado de geometria e outras componentes matemáticas. Já na janela de álgebra é possível visualizar algebricamente todo o objeto construído na janela de visualização.

10. TECNOLOGIAS INTERATIVAS A SERVIÇO DO ENSINO DE MATEMÁTICA

O mundo está em constante transformação, sofrendo inúmeras mudanças, avançando em todos os setores. A tecnologia é um setor que evoluiu rapidamente. Ela está cada vez mais presente no cotidiano de todos, em casa, no trabalho, na rua e particularmente nos ambientes e meios de ensino, despertando atenção dos professores e alunos devido ao seu potencial didático em sala de aula. O uso das tecnologias traz consigo muitos benefícios: além de ser um excelente motivador para os alunos, contribui consistentemente para o aprendizado dos conteúdos desenvolvidos por oferecer recursos que muitas vezes são insuficientes com quadro negro e giz.

Há, no entanto, uma diferença fundamental entre as tecnologias que apenas repassam informações e não permitem que o aluno interaja com o que está sendo feito e as tecnologias que permitem uma maior interação do espectador.

Segundo Silva (2000),

> Na modalidade computacional interativa permitida pelas novas tecnologias informáticas, há mudança significativa na natureza da mensagem, no papel do emissor e no estatuto do receptor. A

> mensagem torna-se modificável na medida em que responde às solicitações daquele que a consulta, que a explora, que a manipula. (p.11)

Em uma avaliação mercadológica, Silva (2007) observa, também, que os estrategistas de *marketing*, estão percebendo que o consumidor faz por si mesmo, que não é mais manipulável, que adquire maiores padrões de exigência diante da variedade de opções de escolha. E certamente esta realidade não é diferente na esfera educacional. Entre tantas alternativas e meios de aprendizagem que nos deparamos, dificilmente o aluno será agradado com aquele que é fruto de repetições e faz dele um mero coadjuvante, passivo repetidor de lições despejadas. Ele, assim como o consumidor, estabece padrões de exigência que o coloquem como elemento crucial do processo. E esse é um direito que não podemos negar-lhe. Ainda nesse sentido, sobre os estrategistas de *marketing*, Silva (2007) observa que

> [...] concluem que a melhor estratégia não é, simplesmente, aquela que faz distribuir produtos em massa, mas sim a que gera comunicação *aberta* entre cliente, produto e produtor. Gerar comunicação *aberta* significa permitir ao cliente-consumidor-usuário atuar como coautor, como cocriador personalizado na relação com o produto. As tecnologias permitem essa comunicação *aberta* e os investidores apostam nela (p.12, grifo do autor).

Além disso, fazer uso da *tecnologia* para trabalhar conceitos diversos - seja em matemática ou qualquer outra área - em prol de uma aprendizagem significativa tem sido amplamente defendido por diversos autores. Sobre essa tendência, Zorzan (2007) preconiza o recurso da tecnologia, alegando que:

> Atualmente, em pleno século XXI, quando as máquinas possibilitam informações e soluções em um tempo reduzido, não é mais possível que a escola continue a desmerecer ou desconsiderar a tecnologia em suas propostas pedagógicas. [..] a escola não pode abrir mão dos novos recursos tecnológicos disponíveis, do contrário, tornar-se-á um

> espaço obsoleto e desvinculado das reais necessidades oriundas da inteligência humana. (p.10)

Fazendo uma análise da evolução temporal/comportamental diante do advento da tecnologia, Silva (2007) cita Rushkoff, que diz que "Os hábitos que se adquire manipulando o controle remoto da tv, o *joystick* do *videogame* e o *mouse* mudaram a maneira pela qual o indivíduo reage à mídia" e conclui que a mudança que opera no receptor vem da utilização das tecnologias que exigem dele algumas ações que vão além da mera recepção.

Porém, a inserção do recurso tecnológico em sala de aula deve ser cuidadosa, sob pena de tornar-se apenas um instrumento de dispersão e não atingir seus objetivos propostos. Ao refletirmos sobre a utilização do *software* GeoGebra como facilitador para a construção do conhecimento, é necessário e fundamental pensar em como fazer uso desta ferramenta para quebrar a "tradição" de decorar fórmulas e conceitos da geometria. Por isso da iniciativa em desenvolver um projeto com problemas ligados a geometria, a fim de auxiliar professores e alunos no estudo da mesma. Gravina (1996) afirma que os *softwares* podem ser trabalhados de duas formas. Na primeira, os próprios alunos constroem as figuras, tendo como objetivo o domínio dos procedimentos para se obter a construção. Na segunda, o professor entrega as figuras prontas aos alunos para que estes possam reproduzi-las. O objetivo desta última modalidade de trabalho é possibilitar que, por meio da experimentação, os alunos descubram as invariantes das propriedades das figuras reproduzidas. Em suma, programas de geometria dinâmica (GD), como é o caso do GeoGebra, proporcionam uma nova abordagem ao aprendizado geométrico, onde conjecturas são feitas a partir da experimentação e criação de objetos. Deste modo, podemos introduzir o conceito matemático desses elementos a partir da resposta gráfica oferecida pelo programa de GD, surgindo daí o processo de argumentação e dedução.

Corroborando com este panorama, Zorzan (2007) sustenta, ainda, que:

> [...] os recursos tecnológicos desse contexto precisam ser estudados, analisados, para servirem de constructos a novas maneiras e possibilidades de constituição do saber escolar. De modo especial, o

> ensino da matemática não pode mais ater-se a um ensino memorístico, no qual se enfatizam as tabuadas e o exercício de cálculos, pois essas atividades não atendem às necessidades sociais. Assim, diante do desenvolvimento do pensamento, do conhecimento, da produção e da cultura, o ensino da matemática, como também das outras áreas do conhecimento, necessita de transformações nos aspectos didático-metodológicos. (p.11)

O professor, diante desta perspectiva, deve assumir um papel de parceiro, conduzindo atividades que visem a exploração e a descoberta e favoreçam a criatividade e o envolvimento do aluno com o assunto em questão. Assim, em uma prática em que o sujeito participa e percebe os resultados de suas ações, e mais, faz uso desta interação para o desenvolvimento do conhecimento, entende-se haver uma aprendizagem sólida e consistente. Com isso, o professor pode, e deve, incentivar o espírito investigativo do aluno, solicitando ao final uma justificativa para as relações encontradas (uma demonstração), podendo ser mais formal de acordo com o nível de aprendizagem do aluno.

11. CONCEPÇÃO DA PROPOSTA E PERSPECTIVAS

A geometria da forma como é habitualmente trabalhada, na maioria das vezes não permite que o aluno visualize com clareza propriedades inerentes de certas construções, independente das dimensões que tenham. Por exemplo, que os ângulos opostos de um quadrilátero inscrito a uma circunferência são suplementares. Logicamente que mais do que visualizar, espera-se que o aluno convença-se, com argumentos consistentes, da validade de certas proposições. É fato, também, que demonstração em geometria não é um exercício trivial, pois depende muitas vezes do potencial intuitivo do aluno. Entretanto, entendemos que o caminho da generalização e formalização passa frequentemente pela observação do fato para diferentes casos. E esse é um recurso que não é natural com uma abordagem com lápis, papel e demais instrumentos convencionais de desenho. Além de exigir muita precisão ao manusear com algumas ferramentas, demandaria algum tempo. A GD, ao contrário, propicia que com um simples arrastar de mouse, o aluno perceba a preservação, ou não, de certas propriedades e isso acabe por estimular a capacidade do aluno em conjecturar e estabelecer relações para então, a partir de uma etapa de identificação dos objetos, construir o processo dedutivo (demonstração), tão importante não só em geometria como em outras áreas da matemática.

Utilizando o GeoGebra para realizar estas construções, facilitamos a visualização da situação, além do convencimento por parte do aluno - com argumentos consistentes para justificar a validade de certas proposições - ser mais natural. O GeoGebra possibilita, além da visualização de uma mesma construção em diferentes disposições, uma melhor compreensão do comportamento geométrico dos elementos envolvidos. Assim, pode ser usado para revelar relações geométricas intrínsecas que poderiam passar despercebidas numa representação estática.

Schoenfeld (1980, p. 795), ao descrever habilidades de resolução de problemas, fala em estratégia heurística, como "[...] uma sugestão ou técnica geral que auxilia os solucionadores de problemas a compreender ou resolver um problema". No mesmo artigo, o autor aponta uma lista de heurísticas frequentemente usadas e as divide segundo a fase de resolução do problema: análise, exploração e verificação.

Para a análise, esse autor sugere, por exemplo: a) escolher valores especiais para exemplificar o problema e entender o que acontece; b) examinar casos-limite, para explorar o domínio de possibilidades. Para a exploração do problema, sugere: a) substituir condições por outras equivalentes; b) recombinar os elementos de maneiras diferentes; c) introduzir elementos auxiliares; d) reformular o problema, supondo que se obteve uma solução e determinando suas propriedades; e) construir um problema análogo com menos variáveis; f) tentar explorar problemas relacionados, que tenham formas, dados ou conclusões similares.

Schoenfeld (1980) propõe, ainda, algumas indagações que o solucionador deve se fazer para verificar a solução encontrada: a) todos os dados pertinentes foram usados? b) a solução está de acordo com estimativas razoáveis? c) a solução pode ser obtida de outra forma?

À luz deste paradigma proposto por Schoenfeld é que sustenta-se a metodologia a ser utilizada nesta pesquisa, no sentido de que o software de geometria dinâmica/recurso adotado dá 'poderes' ao usuário de, após análise inicial, fazer as explorações e experimentações necessárias, a fim de obter o resultado desejado, conduzindo assim, a uma etapa de verificação do problema lançado.

Neste projeto especificamente, como temos por princípio explorar componentes de interatividade, fazemos uso de uma espiral, que serve como linha-guia para que o usuário possa, com um ponto sobre a curva, percorrer a trajetória (num sentido convergente da espiral, ou seja, de fora para dentro) e, assim, na medida em que vai avançando, ter à sua disposição um conjunto de instruções que o conduzem à resolução de um determinado exercício ou à demonstração de um teorema. A dinâmica é norteada por uma pergunta ou sugestão inicial combinada à instrução de percorrer com o ponto sobre a espiral para obter ajuda. Na medida em que as instruções vão aparecendo o usuário tem opção de realizar, a partir do encaminhamento dado, as construções convenientes com o uso das ferramentas habituais do Geogebra ou, se preferir, clicar na caixa de exibição de objeto que acompanha a instrução, para ter um retorno mais imediato. A ideia é, com isso, procurar respeitar o ritmo de aprendizagem de cada aluno, uma vez que entendemos que cada um tem um tempo diferente de assimilação e, da mesma forma, alguns podem, de acordo com as atividades, sentir-se mais desafiados que outros, procurando evitar (ou pelo menos, adiar) o auxílio do recurso oferecido. É fundamental deixar claro que o objetivo não é resolver o problema em si, mas oferecer apoio, caso o usuário sinta necessidade, com elementos que eventualmente sugiram o caminho da solução. O avanço, quanto à utilização do recurso, é derteminado pelo próprio aluno/usuário, estimulando, assim, uma prática autônoma diante destes modelos.

A seguir, apresentamos 3 exemplos de arquivos, já desenvolvidos pelos autores:

a) *Razão entre áreas*: neste arquivo, o objetivo é sugerir ao usuário uma decomposição de figuras planas, a fim de obter a razão entre áreas proposta no exercício. Na FIGURA 1 exibimos a visualização inicial do arquivo, antes da navegação sobre a curva espiral. Já na FIGURA 2, é exibida uma tela quando então foram exibidas as 5 instruções existentes, uma de cada vez (e, nesse caso, utilizados os auxílios nas 4 primeiras, visto que aparecem selecionados). Observe as posições inicial e final do ponto J sobre a espiral, em cada tela.

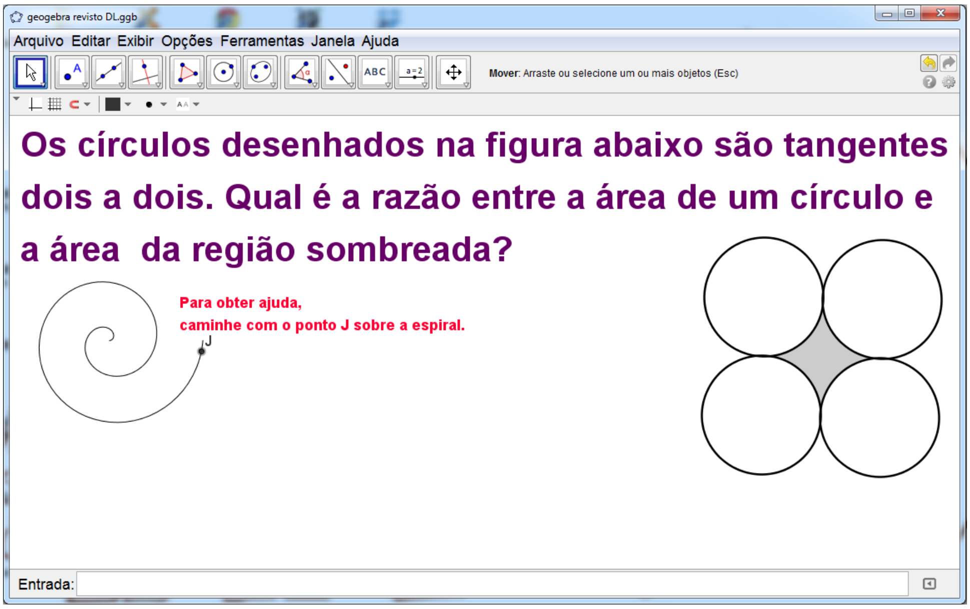


FIGURA 1: arquivo desenvolvido por Daiane Pertile, em que aborda relações de áreas entre figuras planas, na fase inicial da exploração FONTE: acervo dos autores

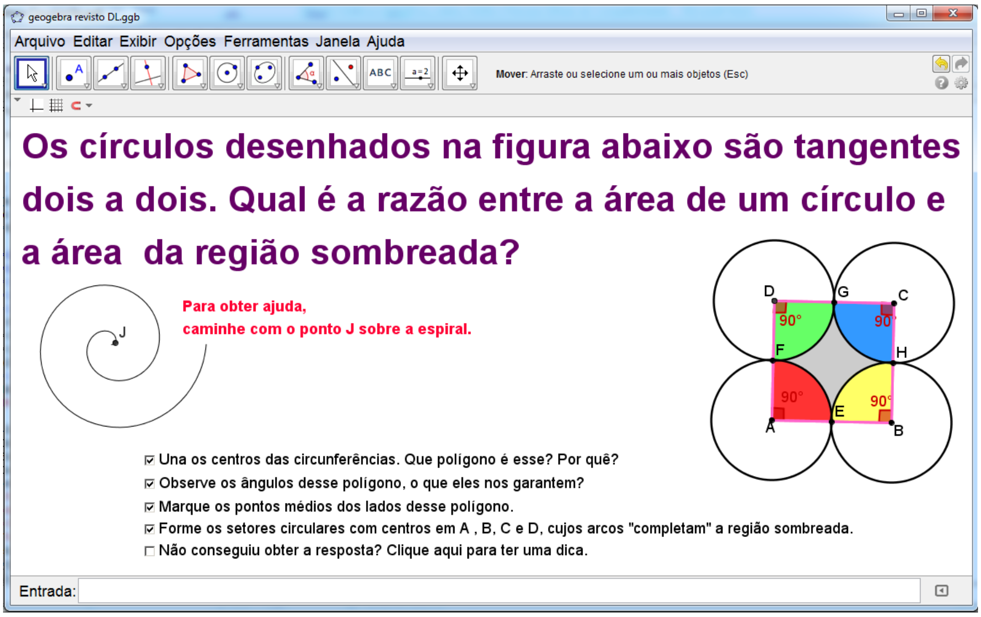


FIGURA 2: arquivo desenvolvido por Daiane Pertile, em que aborda relações de áreas entre figuras planas, na fase final da exploração FONTE: acervo dos autores

b) *Quadriláteros inscritíveis*: neste arquivo, o objetivo é perceber a relação existente entre os ângulos opostos de um quadrilátero inscritível em uma circunferência. Nesta proposta, a autora dá opção de duas soluções distintas, a ser escolhida pelo usuário. Na FIGURA 3 exibimos a visualização inicial do arquivo, antes da navegação sobre a curva espiral. Já na FIGURA 4, é exibida uma tela quando então foram exibidas as 3 instruções existentes (da 2ª opção de resolução), uma de cada vez, todas elas tendo os auxílios correspondentes sido utilizados. Observe as posições inicial e final do ponto P sobre a espiral, em cada tela.

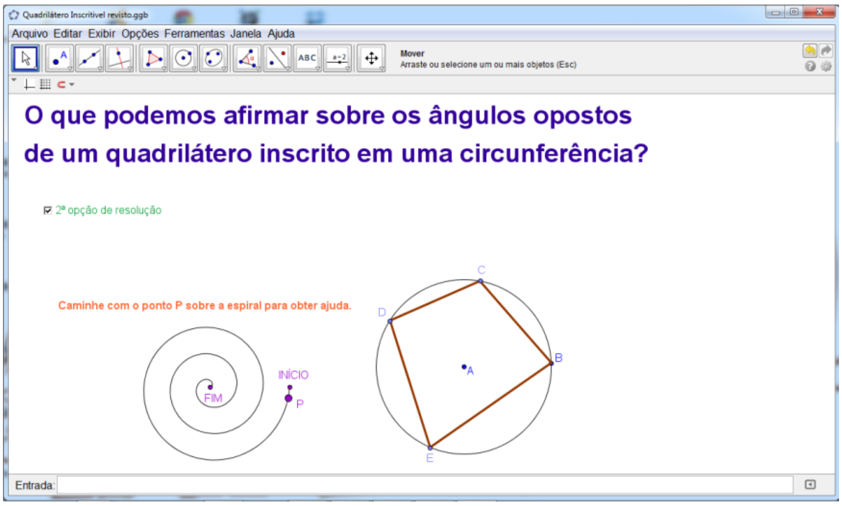


FIGURA 3: arquivo desenvolvido por Angelica Pierozan, em que aborda as relações dos ângulos opostos de um quadrilátero inscritível, na fase inicial da exploração FONTE: acervo dos autores

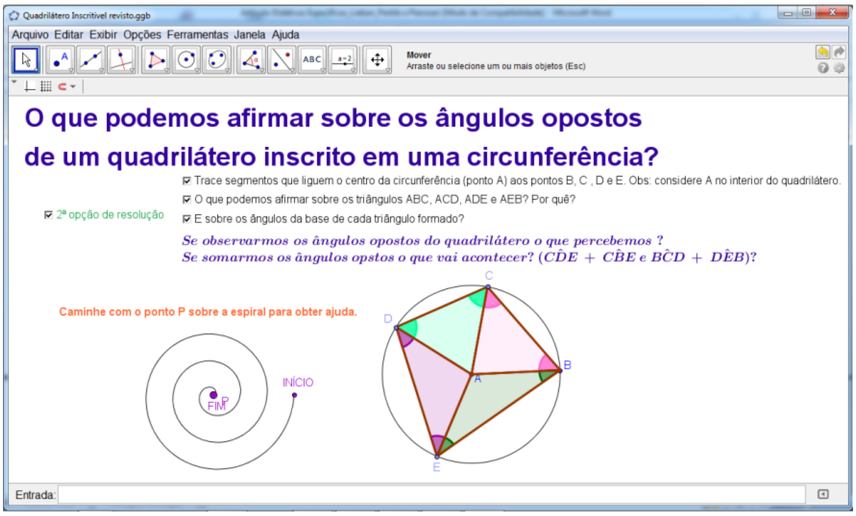


FIGURA 4: arquivo desenvolvido por Angelica Pierozan, em que aborda as relações dos ângulos opostos de um quadrilátero inscritível, na fase final da exploração FONTE: acervo dos autores

c) Teorema de Pitágoras: neste arquivo, o objetivo é sugerir ao usuário uma demonstração do Teorema de Pitágoras através de equivalência de áreas, valendo-se também da decomposição de um quadrado em figuras planas, no caso, quatro triângulos (retângulos) e mais um quadrado menor. Na FIGURA 5 exibimos a visualização inicial do arquivo, antes da navegação sobre a curva espiral e na FIGURA 6, é exibida uma tela na fase final da exploração.

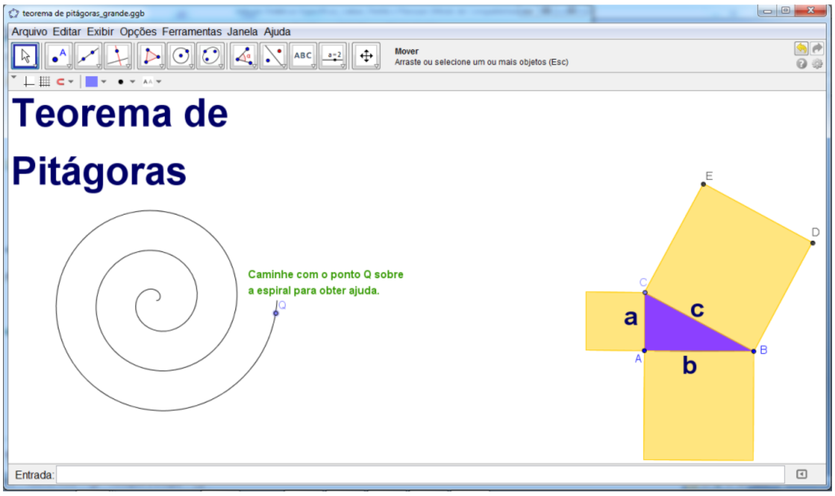


FIGURA 5: arquivo desenvolvido por Diego Lieban, em que sugere uma demonstração possível para o Teorema de Pitágoras, na fase inicial da exploração FONTE: acervo dos autores

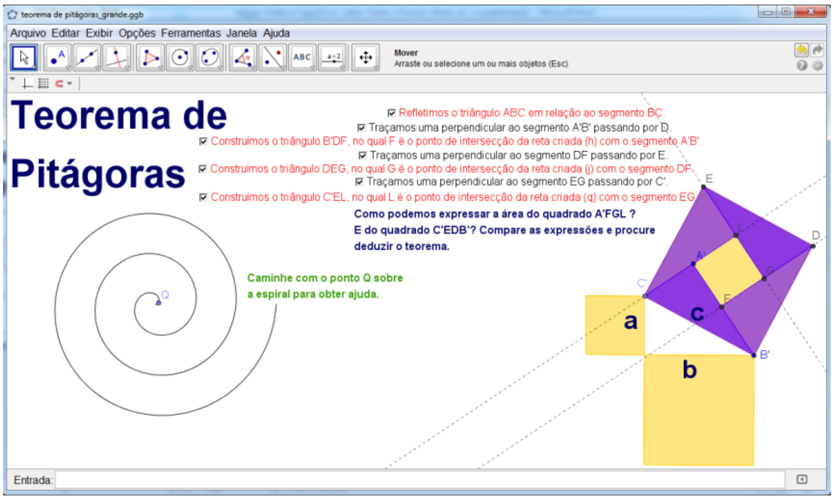


FIGURA 6: arquivo desenvolvido por Diego Lieban, em que sugere uma demonstração possível para o Teorema de Pitágoras, na fase final da exploração FONTE: acervo dos autores

Vale observar que o uso de cores em cada um desses modelos, além do caráter estético, desempenha um papel fundamental, uma vez que contribui para o usuário perceber a conectividade entre alguns elementos presentes no objeto.

12. UM ESTUDO DE CASO

A finalidade desta primeira intervenção foi avaliar a exequibilidade dos arquivos desenvolvidos e propostos, assim como investigar a relação do aluno diante da dinâmica de trabalho com o uso do recurso de geometria dinâmica, amparado pelos professores autores. A hipótese adotada foi a de que o *software*de geometria dinâmica possui potencialidades e auxilia na visualização de certas propriedades. Logo, a mudança da representação estática para a dinâmica traria contribuições, sobretudo, em relação à percepção dos objetos geométricos e ao processamento da imagem, proporcionando uma compreensão mais eficaz de certas proposições.

A oficina foi realizada com 19 alunos, com idades entre 13 e 14 anos, da 8º série, na Escola Municipal de Ensino Fundamental Doze de Maio – Vila Flores/RS. O trabalho foi dividido em duas experiências distintas: aula realizada em sala de aula e aula no laboratório de informática, com o uso do *software* GeoGebra. A duração da oficina foi de 1h30min.

Além dos exercícios cujo foco eram conceitos da geometria plana clássica, apresentou-se aos alunos uma atividade que tinha por objetivo desafiar a intuição matemática dos mesmos, o qual apresentamos aqui, a fim de ilustrar a atividade.

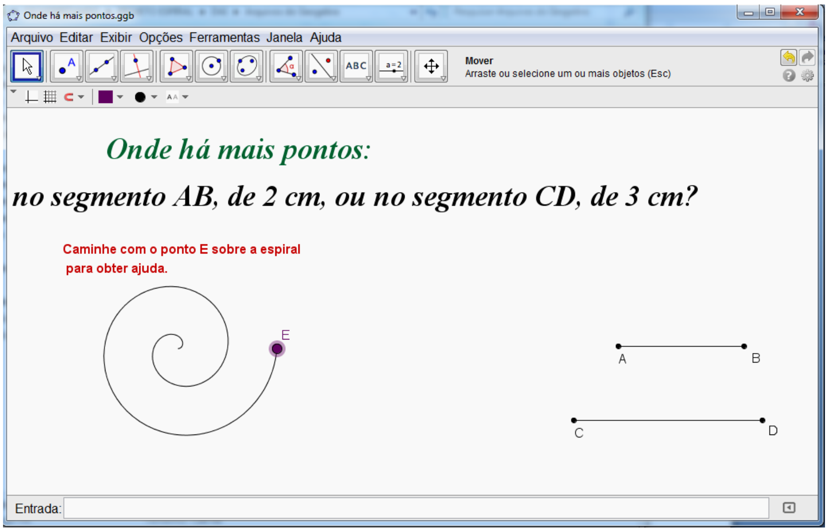


FIGURA 7: arquivo em fase inicial da exploração, desafiando a intuição matemática dos alunosFONTE: acervo dos autores

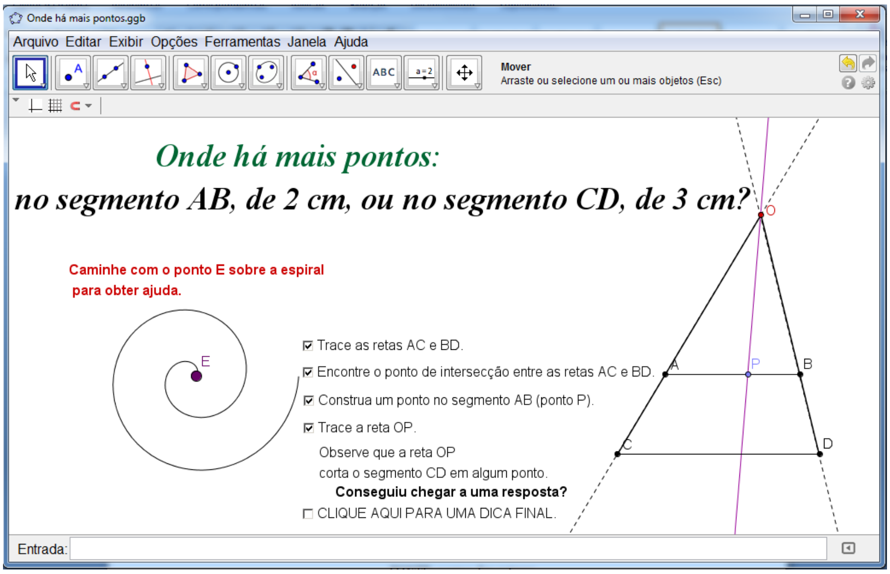


FIGURA 8: arquivo em fase final da exploração, exibindo a correspondência entre pontos dos dois segmentos, fato que sugere a resolução do desafio lançado FONTE: acervo dos autores

Primeiramente os alunos trabalharam em sala de aula resolvendo atividades impressas que abordavam relações entre áreas. Após, os mesmos foram direcionados até o laboratório de informática, onde houve a apresentação do *software* GeoGebra, o menu do programa e suas respectivas funções básicas, assim como a interface do *software*, com a finalidade de estarem sempre à disposição do aluno para consulta. No laboratório os alunos desenvolveram as mesmas atividades que tinham resolvido na sala de aula, porém agora em modelos digitais. Os educandos eram instruídos de como deveriam proceder ao utilizar o *software*, por exemplo, de como deveriam conduzir o ponto sobre a espiral, onde era preciso clicar para obter a construção imediata. Em todo tempo da atividade, os alunos eram assistidos pelas professoras coautoras.

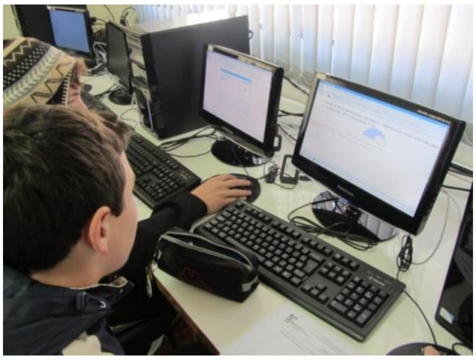


FIGURA 9: em dois momentos distintos, os alunos trbalham inicialmente sem e posteriormente com o software GeoGebra FONTE: acervo dos autores

Para finalizar, os alunos responderam a uma autoavaliação, que tinha por finalidade verificar quais as dificuldades encontradas em trabalhar tanto com o modelo impresso quanto digital das atividades.

13. DISCUSSÕES E RESULTADOS

Para analisar os resultados obtidos foi levado em consideração as respostas da autoavaliação respondida pelos alunos, além de nossa observação *in loco*. Quando questionados sobre as dificuldades encontradas para resolver as atividades impressas, 3 alunos responderam que não encontraram dificuldades, enquanto 16 alegaram que sim. Dentre os que encontraram dificuldades em resolver as questões alguns argumentaram ter pouco tempo para desenvolver as atividades, outros disseram que não estavam na aula no dia da explicação da matéria feita pela professora de Matemática da turma.

No segundo item questionou-se os alunos se tinham encontrado dificuldades para resolver as questões utilizando o *software* GeoGebra: 15 alunos responderam que não haviam identificado dificuldade alguma, enquanto 4 alunos responderam que acharam difícil. Alguns alunos comentaram que gostaram de trabalhar com o GeoGebra, por ser de *fácil acesso* e de *alta qualidade* (as expressões em destaque foram utilizadas pelos próprios alunos). Para finalizar foi solicitado que eles comparassem os dois modelos de trabalho – impresso e digital – e respondessem qual, na opinião deles, possibilitava um melhor aprendizado ou facilitaria a resolução da atividade e qual deles foi mais atrativo para trabalhar: 16 alunos responderam que a melhor forma de trabalhar seria utilizando o *software*, pois torna a visualização da imagem mais clara, mais compreensível e é uma forma interessante de aprender que se diferencia da tradicional lista de atividades impressas. E 3 alunos alegaram que não gostaram de trabalhar nem com o *software* GeoGebra e nem com as questões impresas, não sugerindo nenhuma outra forma para se trabalhar. Naturalmente que há de se ter cuidado com qualquer inferência, tendo em vista a pequena amostragem que temos. No entanto, as respostas positivas são indicativos de que a proposta atendeu às expectativas de auxiliá-los e fazer com que eles interagissem com os modelos apresentados e, por isso, merece um desdobramento com outras intervenções. Também vale registrar que o desenvolvimeto dos objetos de aprendizagem produzidos deixa claro que é fundamental, além da formação em geometria, o conhecimento em outras áreas da matemática como, por exemplo, noções elementares de lógica booleana para a criação dos elementos de interatividade.

Finalmente, como perspectivas de ampliação desta proposta, estamos preparando outras oficinas para serem ofertadas junto aos alunos do Ensino Médio e Ensino Superior, onde eles deverão ter acesso a questões adequadas com seu nível, em formato impresso, antes de serem apresentados aos modelos digitais.

14. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática é vista pela grande maioria dos estudantes como uma vilã. Para confirmar isso basta observarmos as pesquisas referentes à qualidade de ensino nesta área. Estas pesquisas mostram como os estudantes não dominam o conteúdo que lhes é passado. Isso ocorre por inúmeros motivos, dentre eles a falta de motivação e interesse. Com a criação deste artigo tínhamos por objetivo expor nosso trabalho de utilizar o s*oftware* Geogebra na resolução de problemas da geometria. Isso por que acreditamos que com o uso do *software* os alunos terão uma visão diferente da matemática. Eles sentem mais vontade de aprender. Cabe ressaltar aqui que os alunos só aprendem se quiserem aprender (Paro, 2010), assim o professor deve introduzir em suas práticas docentes meios que propiciem isso. Planejamento, criatividade e iniciativa devem ser ingredientes indispensáveis para combater qualquer indicativo de caminho contrário a essa direção.

O uso de softwares para o ensino e aprendizagem de matemática, apesar de estar cada vez mais em voga, carece ainda de iniciativas inovadoras e que promovam estratégias que explorem os limites de seus recursos e potencialidades.

A capacidade do docente em decidir o momento e a abordagem adequados na utilização da tecnologia como um recurso auxiliar no processo de ensino-aprendizagem reflete o seu conhecimento do conteúdo da disciplina, que deve ser pensado, analisado e aperfeiçoado continuamente. Não basta que o professor queira utilizar as tecnologias no ensino da matemática, é necessário que ele esteja capacitado e que seus objetivos didáticos estejam relacionados com o *software* a ser utilizado para que seu uso em sala de aula não se torne em vão.

Por último, gostaríamos de registrar também que, apesar de considerarmos que a proposta incentiva uma prática autônoma dos alunos, julgamos de fundamental importância o acompanhamento próximo do professor, pois assim, poderá intervir sempre oportunamente com esclarecimentos e questionamentos que resultarão, certamente, em um melhor aproveitamento dos modelos propostos e, consequentemente, propiciará uma formação mais sólida ao aluno.

BIBLIOGRAFIA

GRAVINA, M. A (1996): Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado de geometria. In: *SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO*, 7,1996, Belo Horizonte. *Anais*... Belo Horizonte.

PARO, V. H. (2010): *Educação como Exercício do Poder: crítica ao senso comum em educação*. São Paulo: Cortez.

SCHOENFELD, A. H. (1980): Teaching problem-solving skills.American Mathematical Monthly, Washington, v. 87, n. 10, p. 794-805.

SILVA, M. (2000): *Sala de Aula Interativa*. Rio de Janeiro: Quarter.

ZORZAN, A. S. L. (2007): Ensino-Aprendizagem: Algumas tendências na educação matemá-tica. In: GÜLLICH, R. I. C (Org.). *Educar pela pesquisa: Formação e processos de estudo e aprendizagem com pesquisa.*

EULER CHARACTERISTIC FOR TEACHERS

Paola Supino[19]

Dipartimento di Matematica e Fisica, Università di Roma Tre, Italia

RESUMEN:

En este trabajo se propone la famosa fórmula de Euler para las superficies en el espacio, que consideramos ser un tema interesante tratar en las clase, para destacar cómo las matemáticas, especialmente en la geometría, hay muchas maneras diferentes de investigación de un mismo objeto. A través de algunos ejemplos, en la definición de la característica de Euler, se destaca la necesidad de introducir no una tessalatión de superficies, sino una triangulación. También sugerimos que los profesores utilizan la característica de Euler para poner de relieve las diferencias entre sólidos topológicos con y sin agujeros.
Palabras clave: Poliedros, característica de Euler, triangulación, invariantes.

ABSTRACT:

In the present paper we explain the well-known Euler formula for solids, as an interesting argument to be dealt with students, in order to point out that in mathematics, and particularly in geometry, there are many different ways to investigate objects. It is also explained with examples the topological reason for which, in defining the Euler Characteristic of a polyhedral surface in the space, it is necessary to use a triangulation, instead of a general tessellation. Moreover, it is suggested to teacher to use the Euler Characteristic to enlight the topological difference between solids with or without holes.
Keywords: Polyedra, Euler characteristic, invariants, triangulation.

Among mathematic teachers, is quite famous the formula "vertices minus edges plus faces equals two", valid for all the platonic solids, the so-called Euler Characteristic Formula for solids. It can be a nice activity to propose a fifth grade classroom (age 10-11) to discover it, eventually through a by-hand experiment with sticks and play-dough models, some of these activities can be found in Kennedy and Tipps.

[19] psupino@uniroma3.it

The famous formula has also inspired a successful novel (see Neuschwander), fashioned as a Tale of King Arthur style, among a series devoted to illustrate to younger students some mathematical results. The novel is addressed to age 6-9, while a deeper lecture devoted to check math materials inside can be performed also at age 9-12. Working on a mathematic activity not exclusively finalized to arithmetic computation is a valuable action, in order to catch a new interest from the students towards the subject, other than to give a more complete presentation of it. We all know in fact that mathematics, and geometry in particular, is not only the art of measuring and computing, but also is the art of comparing and finding similarities as well as differences among objects.

It is beneficial, nevertheless, to hit the core of the mathematical meaning of what may appear simply a fancy of nature. What does really mean the Euler formula for solids?

In what follows we try to clarify the formula starting from the definitions and give the taste of its geometric meaning.

In Euclidean geometry, a plane polygonal figure is signed with the number of its sides, the number of equal internal vertices, the length of the sides, the number of couple of opposite sides... The comparison of two plane polygonal figures at a glance goes firstly through counting its sides: if they are different in number you can say that the two pictures are not "the same" picture, if they are equal, you go on looking further for other data until every data is tested to be equal, or you find something different. In this way a child can say that a square and a rectangular are not the same geometric picture, or that two squares are different because they have different side length. Theorems come in support to shorten the check list of data to be compared, as it happens with equality criteria for triangles.

The Euclidean geometry studies geometric figures up to isometries, that is to say, two figures are "equal", meaning they are "the same" figure, if there exists a rigid movement that brings one onto another: two squares are the same square if and only if they have the same side, no matter which is the position in the space.

All the data which do not change under isometries are taken in account, number of edges, vertices, measuring lengths, angles, areas... These are called "Euclidean invariants", and are the descriptors of the objects under observations. It is evident that the more the object is complex, the more the number of data to describe it increases: just think of the number of data related to an irregular prism compared to the data related to rectangle.

More generally, rightly the frame to keep in mind is the notion of invariants: this elementary principle is the skeleton of every classification method, in geometry as well as in biology, or every science: to put labels on objects to enlighten differences and similarities. In the study of shapes, if we want to focus other properties than the metric properties, we are using a geometric theory, other than the Euclidean geometry, with a definition of the notion of "equality" (technically, of "isomorphism") different from the isometry, and are checking other list of data. These data, which are the "invariants" under the chosen isomorphisms, may be either numbers, either may be more complex algebraic structures. Likely, one can expect that the amount of invariants increases with the complexity of the structures under examination.

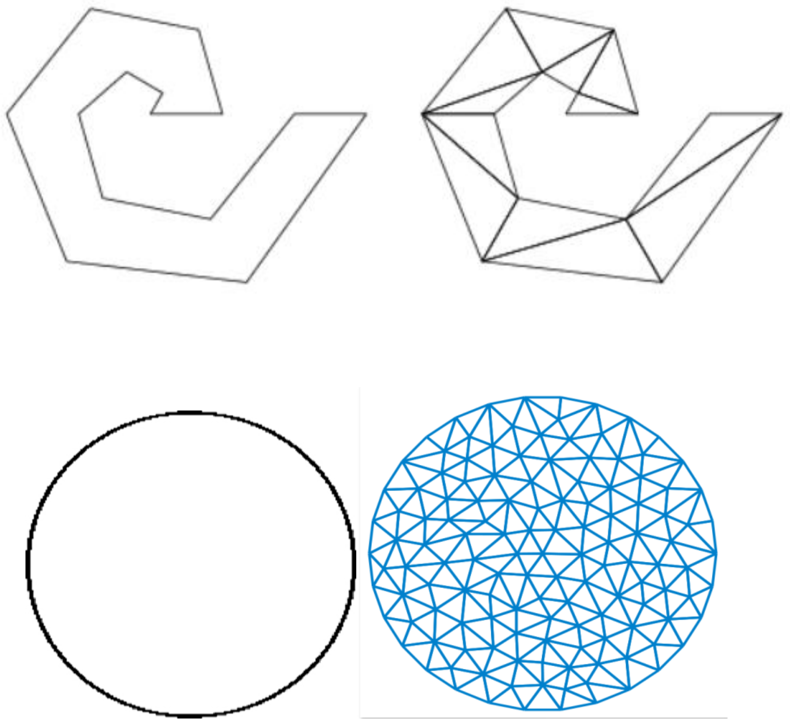
Thus, we have different geometry branches, each of which focuses on a specific kind of properties of the objects that are studied.

For example, the branch of geometry called topology is known as the geometry of the play-dough, intending that it studies properties that are preserved under continuous deformations, including stretching and bending, but not tearing or gluing. The movements allowed in topology are called "bicontinuous transformations": this means continuous transformations which have a continuous inverse transformation. Misures such as lengths, areas, volumes, distances, are not relevant from a topological viewpoint, since those are not invariant under the action of a bicontinuous transformation. Convexity neither is a topological property, since, with a bicontinuous motion, starting from a circle, one can move a nylon loop on a plane to draw a U shaped region, thus losing the convexity property. Topology does care of connectivity properties, such as number of pieces of a figure, and of continuity, so that a mug is equal to a doughnut ("torus"), as well as a cube is equal to a ball or a rugby ball. Of course, topology has is basic definitions under which the above intuitive examples are rigorously expressed, but they are too technical to be given to elementary level.

The Euler characteristic of a geometric figure is nothing else than a basic topological invariant, that is, a label which remains unaltered under bicontinuous transformations, as well as the number of sides of a polygonal figure remains unaltered under isometries, in Euclidean geometry.

A general overview historical as well as mathematical can be found in the classical book of Courant and Robbins, and in Hartshorne the polyedra and their properties are treated starting from a Euclidean point of view, unlighted by modern geometry. A wide topological viewpoint, with a historical part dedicated specifically to Euler formula, and many illustrations and examples can be found in Richenson.

From a didactic viewpoint, it is possible to attack some elementary topological study using only intuition and without entering in technical definitions, nevertheless tasting the flavor of the power of the discipline. But some care is needed. To define the Euler characteristic we need to know what a triangulation is. For sake of simplicity, one can concentrate only on surfaces, but the notion can be generalized in any dimension. A triangulation is the division of a surface region into a set of triangles, such that each triangle side is entirely shared by two adjacent triangles, which in particular have two vertices in common. It is a theorem that every surface has a triangulation, but it might require an infinite number of triangles.



A surface with a finite number of triangles in its triangulation is called compact.

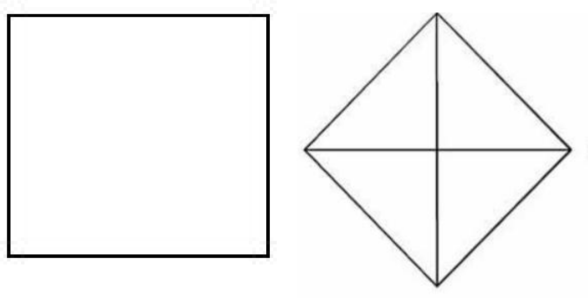
In higher dimension the triangles are substituted by generalized triangles, called simplexes.

Of course, for a given surface, there are many ways in drawing a triangulation, but it has proved (originally Euler did, but only for simple polyhedral surfaces) the following interesting result.

Theorem.The alternate sum

$$\chi=v-e+f$$

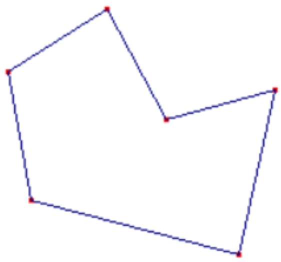
wherev, e, and f are respectively the numbers of vertices, edges and faces, do not depend on the triangulation, moreover, it is a topological invariant of the surface.

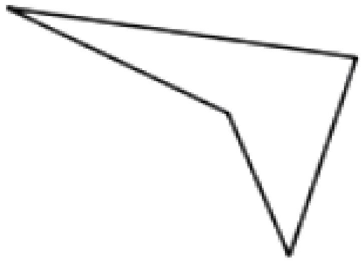


Note that drawing a segment joining two not consecutive vertices add a face to the picture, and an edge, but do not add any vertex, so the sum

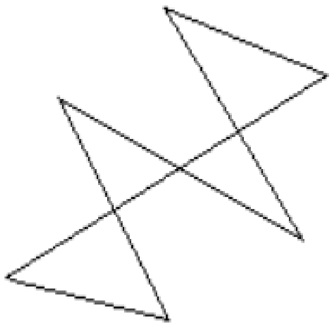
$$\chi=v-e+f$$

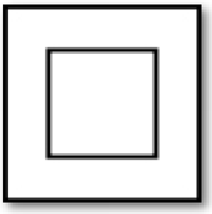
remains unchanged. Thus, for a plane polygon the sum χ coincide with the number of vertices of the polygon itself minus the number of its edges plus 1. The computation does not change changing the shape of the polygon:





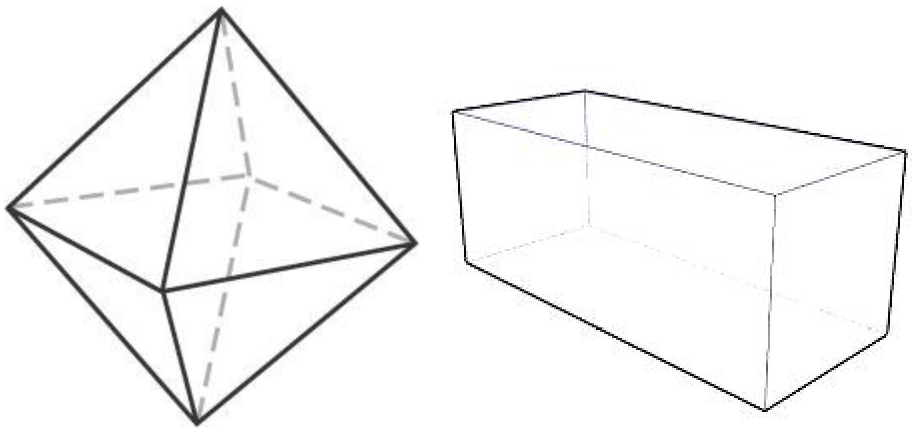
Here we point out that a polygon is simple by definition, that is, its boundary does not intersect itself. In this case the result for χ always turns out to be equal to 1. On the other hand, in the case of a complex polygon the number χ is not constantly equal to one, just check some examples as in the following pictures:



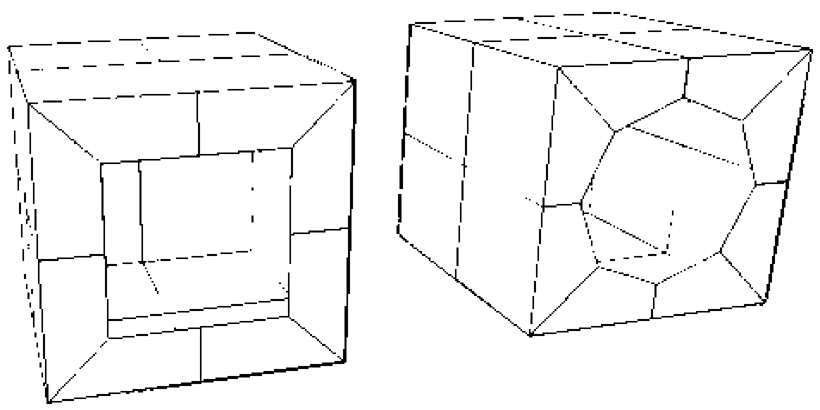


Note that only taking in account similar pictures one can experiment the necessity of introducing a triangulation and the value of the Euler characteristic as a topological invariant. In fact, in the picture of two concentric squares, considering the region between the two, one can test for instance that tessellations with quadrangular may give ambiguous values for χ. Moreover, χ in such pictures is different from 1, which is the value for polygons, and this is an evidence that the above pictures are not topologically equivalent to any polygon.

The same experience can be performed if one considers polyhedral surfaces: polyhedral figures have the didactic advantage of being more handy with respect to plane figures.



School experiments are proposed by teachers in order to discover that the alternate sum $\chi = v-e+f$ of vertices, edges and faces of a platonic solid surface always gives the same magic number 2, whatever of the five solids is chosen. As in the plane case, tessellation by polygons is sufficient to compute the number χ, but this works just because only simple figures are considered. A further step is needed for a complete comprehension, which could be performed proposing to the classroom to evaluate the number χ for not simple solids, as a cube with a polyhedral hole in the middle, using different triangular tessellation, and comparing the result with the computation of vertices, edges and faces of the figure with no tessellation.



Students will thus discover that these polyhedral surfaces, which are topologically different from a platonic polyhedral surface, needing to be glued to fit the hole, are labeled with a different Euler characteristic. The work can be further deepened in studying polyhedral surfaces obtained from prisms with more polyhedral holes. The last experiments lead the students to a deeper knowledge of topological properties of geometric figures versus metric properties, and of a correct way to classify them.

BIBLIOGRAPHY:

COURANT, R.; ROBBINS, H. (1941): What Is Mathematics? An Elementary approach to ideas and methods, Oxford University Press, New York.

HARTSHORNE, R. (2000): *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer-Verlag.

KENNEDY, L.; TIPPS, S. JOHNSON A. (2008): *Guiding Children's Learning of Mathematics*, Cengage Learning.

NEUSCHWANDER, C. (2003): *Sir Cumference and the sword in the Cone*, Charlesbridge Publishing.

RICHESON, D. *Euler's Gem: The polyhedron formula and the birth of topology*. Princeton University Press, 20

A RIGOROUS DEDUCTIVE APPROACH OF ELEMENTARY EUCLIDEAN GEOMETRY

Jean-Pierre Demailly[19]
Université Joseph Fourier Grenoble I
Permanent member of the French Academy of Sciences

RESUMEN :

El objetivo de este artículo es presentar un enfoque riguroso y aún razonablemente simples para la enseñanza de la geometría euclidiana elemental a nivel de educación secundaria. La geometría euclidiana es una área privilegiada de las matemáticas, ya que permite desde un primer nivel practicar razonamientos rigurosos y ejercitar la visión y la intuición. Nuestra preocupación es que las numerosas reformas de planes de estudio en las últimas 3 décadas en Francia, y posiblemente en otros países occidentales, han llevado a una disminución preocupante de la geometría, junto con un generalizado debilitamiento del razonamiento matemático al que la geometría contribuye específicamente de manera esencial. Esperamos que este punto de vista sea de interés para los autores de libros de texto y también para los profesores que tienen la posibilidad de no seguir exactamente las prescripciones sobre los contenidos menos relevantes, cuando están por desgracia impuestos por las autoridades educativas y por los planes de estudios. El contenido de las primeras secciones, en principio, debería también ser dominado por los profesores de la escuela primaria, ya que siempre es recomendable conocer más de lo que uno tiene que enseñar, a cualquier nivel!
Palabras clave: Geometría euclidiana

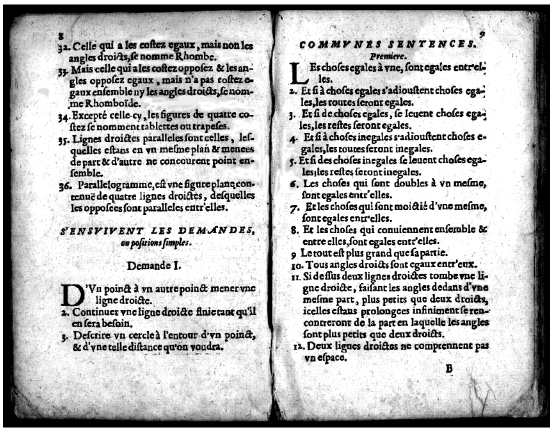
ABSTRACT:

The goal of this article is to explain a rigorous and still reasonably simple approach for teaching elementary Euclidean geometry at the secondary education levels. Euclidean geometry is a privileged area of mathematics, since it allows from an early stage to practice rigorous reasonings and to exercise vision and intuition. Our concern is that the successive reforms of curricula in the last 3 decades in France, and possibly in other western countries as well, have brought a worrying decline of geometry, along with a weakening of mathematical reasoning which geometry specifically contributed to in an essential way. We hope that these views will be of some interest to textbook authors and to teachers who have a possibility of not following too closely the prescriptions for weak contents, when they are unfortunately enforced by education authorities and curricula. The first sections should ideally also be mastered by primary school teachers, as it is always advisable to know more than what one has to teach at any given level !
Keywords: Euclidean geometry

19 jean-pierre.demailly@ujf-grenoble.fr

1. ON AXIOMATIC APPROACHES OF GEOMETRY

As a formal discipline, geometry originates in Euclid's list of axioms, even though substantial geometric knowledge existed even before.



8

32. Celle qui a les coſtez egaux, mais non les angles droicts, ſe nomme Rhombe.
33. Mais celle qui a les coſtez oppoſez & les angles oppoſez egaux, mais n'a pas coſtez egaux enſemble ny les angles droicts, ſe nomme Rhomboïde.
34. Excepté celle-cy, les figures de quatre coſtez ſe nomment tablettes ou trapeſes.
35. Lignes droictes paralleles ſont celles, leſquelles eſtans en vn meſme plan & menees de part & d'autre ne concourent point enſemble.
36. Parallelogramme, eſt vne figure planę contenuë de quatre lignes droictes, deſquelles les oppoſees ſont paralleles entr'elles.

S'ENSVIVENT LES DEMANDES, ou poſitions ſimples.

Demande I.

D'Vn poinct à vn autre poinct mener vne ligne droicte.
2. Continuer vne ligne droicte finie tant qu'il en ſera beſoin.
3. Deſcrire vn cercle à l'entour d'vn poinct, & d'vne telle diſtance qu'on voudra.

9

COMMVNES SENTENCES.
Premiere.

LEs choſes egales à vne, ſont egales entr'elles.
2. Et ſi à choſes egales s'adiouſtent choſes egales, les toutes ſeront egales.
3. Et ſi de choſes egales, ſe leuent choſes egales, les reſtes ſeront egales.
4. Et ſi à choſes inegales s'adiouſtent choſes egales, les toutes ſeront inegales.
5. Et ſi des choſes inegales ſe leuent choſes egales, les reſtes ſeront inegales.
6. Les choſes qui ſont doubles à vn meſme, ſont egales entr'elles.
7. Et les choſes qui ſont moictié d'vne meſme, ſont egales entr'elles.
8. Et les choſes qui conuiennent enſemble & entre elles, ſont egales entr'elles.
9 Le tout eſt plus grand que ſa partie.
10. Tous angles droicts ſont egaux entr'eux.
11. Si deſſus deux lignes droictes tombe vne ligne droicte, faiſant les angles dedans d'vne meſme part, plus petits que deux droicts, icelles eſtans prolongees infiniment ſe rencontreront de la part en laquelle les angles ſont plus petits que deux droicts.
12. Deux lignes droictes ne comprennent pas vn eſpace.

B

An excerpt of Euclid's book

The traditional teaching of geometry that took place in France during the period 1880-1970 was directly inspired by Euclid's axioms, stating first the basic properties of geometric objects and using the "triangle equality criteria" as the starting point of geometric reasoning. This approach had the advantage of being very effective and of quickly leading to rich contents. It also adequately reflected the intrinsic nature of geometric properties, without requiring extensive algebraic calculations. These choices echoed a mathematical tradition that was firmly rooted in the nineteenth century, aiming to develop "pure geometry", the highlight of which was the development of projective geometry by Poncelet.

Euclid's axioms, however, were neither complete nor entirely satisfactory from a logical perspective, leading mathematicians as Pasch and Hilbert to develop the system of axioms now attributed to Hilbert, that was settled in his famous memoir Grundlagen der Geometrie in 1899. The approach was later somewhat simplied by Emil Artin.

David Hilbert (1862-1943), in 1912

It should be observed, though, that the complexity of Hilbert's system of axioms makes it actually unpractical to teach geometry at an elementary level. The result, therefore, was that only a very partial axiomatic approach was taught, leading to a situation where a large number of properties that could have been proved formally had to be stated without proof, with the mere justification that they looked intutively true. This was not necessarily a major handicap, since pupils and their teachers may not even have noticed the logical gaps. However, such an approach, even though it was in some sense quite successful, meant that a substantial shift had to be accepted with more contemporary developments in mathematics, starting already with Descartes' introduction of analytic geometry . The drastic reforms implemented in France around 1970 (with the introduction of "modern mathematics") swept away all these concerns by implementing an entirely new paradigm : according to Jean Dieudonné, one of the Bourbaki founders, geometry should be taught as a corollary of linear algebra, in a completely general and formal setting. The first step of the reform implemented this approach from "classe de seconde" (grade 10) on. A major problem, of course, is that the linear algebra viewpoint completely departs from the physical intuition of Euclidean space, where the group of invariance is the group of Euclidean motions and not the group of affine transformations. The reform could still be followed in a quite acceptable way for about one decade, as long as pupils had a solid background in elementary geometry from their earlier grades, but became more and more unpractical when primary school and junior high school curricula were themselves (quite unfortunately) downgraded. All mathematical contents of high school were then severely axed around 1985, resulting in curricula prescriptions that in fact did not allow any more the introduction of substantial deductive activity, at least in a systematic way. We believe however that it is necessary to introduce the basic language of mathematics, e.g. the basic concepts of sets, inclusion, intersection, etc, as soon as needed, most certainly already at the beginning of junior high school. Geometry is a very appropriate groundfield for using this language in a concrete way.

2. GEOMETRY, NUMBERS AND ARITHMETIC OPERATIONS

An important issue is the relation between geometry and numbers. Greek mathematicians already had the fundamental idea that ratios of lengths with a given unit length were in one to one correspondence with numbers : in modern terms, there is a natural distance preserving bijection between points of a line and the set of real numbers. This viewpoint is of course not at all in contradiction with elementary education since measuring lengths in integer (and then decimal) values with a ruler is one of of the first important facts taught at primary school. However, at least in France, several reforms have put forward the extremely toxic idea that the emergence of electronic calculators would somehow free pupils from learning elementary arithmetic algorithms for addition, subtraction, multiplication and division, and that mastering magnitude orders and the "meaning" of arithmetic operations would be more than enough to understand society and even to pursue in science. The fact is that one cannot conceptually separate numbers from the operations that can be performed on them, and that mastering algorithms mentally and in written form is instrumental to realizing magnitude orders and the relation of numbers with physical quantities.

The first contact that pupils will have with "elementary physics", again at primary school level, is probably through measuring lengths, areas, volumes, weights, densities, etc. Understanding the link with arithmetic operations is the basic knowledge that will be involved later to connect physics with mathematics. The idea of a real number as a possibly infinite decimal expansion then comes in a natural way when measuring a given physical quantity with greater and greater accuracy. Square roots are forced upon us by Pythagoras' theorem, and computing their numerical values is also a very good introduction to the concept of real number. I would certainly recommend to (re)introduce from the very start of junior high school (not later than grade 6 and 7), the observation that fractions of integers produce periodic decimal expansions, e.g. $1/7 = 0.\underline{142857}142857...$, while no visible period appears when computing the square root of 2. In order to understand this (and before any formal proof can be given, as they are conceptually harder to grasp), it is again useful to learn here the hand and paper algorithm for computing square roots, which is only slightly more involved than the division algorithm and makes it immediately clear that there is no reason the result has to be periodic – unfortunately, this algorithm is no longer taught in France since a long time. When all this work is correctly done, it becomes really possible to give a precise meaning to the concept of real number at junior high school – of course many more details have to be explained, such as the identification of proper and improper decimal expansions, e.g. $1 = 0.99999...$, the natural order relation on such expansions, decimal approximations with at given accuracy, etc. In what follows, we propose an approach of geometry based on the assumption that pupils have a reasonable understanding of numbers, arithmetic operations and physical quantities from their primary school years – with consolidation about things such infinite decimal expansions and square roots in the first two years of junior high school ; this was certainly the situation that prevailed in France before 1970, but things have unfortunately changed for the worse since then. Our small experimental network of schools SLECC ("Savoir

Lire Ecrire Compter Calculer"), which accepts random pupils and operates in random parts of the country, shows that such knowledge can still be reached today for a very large majority of pupils, provided appropriate curricula are enforced. For the others, our views will probably remain a bit utopistic, or will have to be delayed and postponed at a later stage.

3. FIRST STEPS OF THE INTRODUCTION OF EUCLIDEAN GEOMETRY

3.1. Fondamental concepts

The primitive concepts we are going to use freely are :

– real numbers, with their properties already discussed above ;

– points and geometric objects as sets of points : a point should be thought of as a geometric object with no extension, as can be represented with a sharp pencil ; a line or a curve are infinite sets of points (at this point, this is given only for intuition, but will not be needed formally) ;

– distances between points.

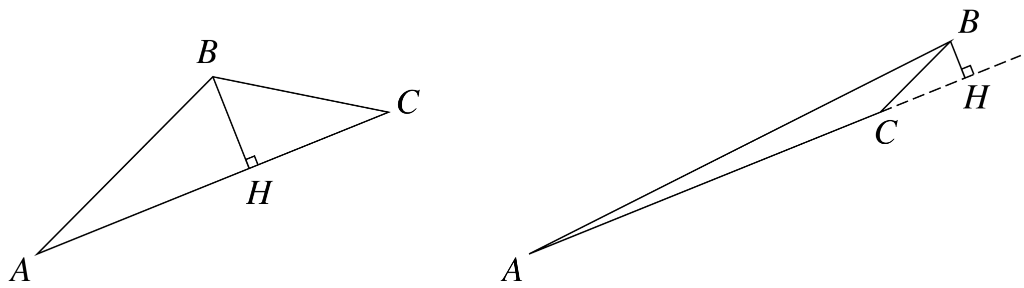
Let us mention that the language of set theory has been for more than one century the universal language of mathematicians. Although excessive abstraction should be avoided at early stages, we feel that it is appropriate to introduce at the beginning of junior high school the useful concepts of sets, of inclusion, the notation $x \in A$, operations on sets such as union, intersection and difference ; geometry and numbers already provide rich and concrete illustrations.

A geometric figure is simply an ordered finite collection of points A_j and sets S_k (vertices, segments, circles, arcs, ...)

Given two points A, B of the plane or of space, we denote by $d(A, B)$ (or simply by AB) their distance, which is in general a positive number, equal to zero when the points A and B coincide - concretely, this distance can be mesured with a ruler. A fundamental property of distances is :

3.1.1. Triangular inequality. *For any triple of points A,B,C, their mutual distances always satisfy the inequality* $AC \leq AB + BC$*, in other words the length of any side of a triangle is always at most equal to the sum of the lengths of the two other sides.*

Intuitive justification.



Let us draw the height of the triangle joining vertex B to point H on the opposite side (AC).

If H is located between A and C, we get $AC = AH + HC$; on the other hand, if the triangle is not flat (i.e. if $H \neq B$), we have $AH < AB$ and $HC < BC$ (since the hypotenuse is longer than the right-angle sides in a right-angle triangle – this will be checked formally thanks to Pythagoras' theorem). If H is located outside of the segment $[A, C]$, for instance beyond C, we already have $AC < AH \leq AB$, therefore $AC < AB \leq AB + BC$.

This justification[20] shows that the equality $AC = AB + BC$ holds if and only if the points A, B, C are aligned with B located between A and C (in this case, we have $H = B$ on the left part of the above figure). This leads to the following intrinsic definitions that rely on the concept of distance, and nothing more[21].

20 This is not a real proof since one relies on undefined concepts and on facts that have not yet been proved, for example, the concept of line, of perpendicularity, the existence of a point of intersection of a line with its perpendicular, etc.. This will actually come later (without any vicious circle, the justifications just serve to bring us to the appropriate definitions!)

21 As far as they are concerned, these definitions are perfectly legitimate and rigorous, starting from our primitive concepts of points and their mutual distances. They would still work for other geometries such as hyperbolic geometry or general Riemannian geometry, at least when geodesic arcs are uniquely defined globally).

3.1.2. Definitions (segments, lines, half-lines).

(a) *Given two points A, B in a plane or in space, the segment* $[A, B]$ *of extremities A, B is the set of points M such that* $AM + MB = AB$.

(b) *We say that three points A, B, C are aligned with B located between A and C if* $B \in [A, C]$, *and we say that they are aligned* (*without further specification*) *if one of the three points belongs to the segment determined by the two other points.*

(c) *Given two distinct points A, B, the line* (AB) *is the set of points M that are aligned with A and B*; *the half-line* $[A, B)$ *of origin A containing point B is the set of points M aligned with A and B such that either M is located between A and B, or B between A and M. Two half-lines with the same origin are said to be opposite if their union is a line.*

In the definition, part (a) admits the following physical interpretration : a line segment can be realized by stretching a thin and light wire between two points A and B : when the wire is stretched, the points M located between A and B cannot "deviate", otherwise the distance AB would be shorter than the length of the wire, and the latter could still be stretched further ...

We next discuss the notion of an axis: this is a line $\mathcal{D}$ equipped with an origin O and a direction, which one can choose by specifying one of the two points located at unit instance from O, with the abscissas +1 and -1 ; let us denote them respectively by I and V. A point $M \in [O, I)$ is represented by the real value $x_M = + OM$ and a point M on the opposite half-line $[O, I') = x_M$ by the real value $- OM$. The algebraic measure of a bipoint (A, B) of the axis is defined by $\overline{AB} = x_B - x_A$, which is equal to $+ AB$ or $- AB$ according to whether the ordering of A, B corresponds to the orientation or to its opposite. For any three points A, B, C of $\mathcal{D}$, we have the Chasles relation

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

This relation can be derived from the equality $(x_B - x_A) + (x_C - x_B) = (x_C - x_A)$

after a simplification of the algebraic expression.

Building on the above concepts of distance, segments, lines and half-lines, we can now define rigorously what are planes, half-planes, circles, circle arcs, angles …[22]

3.1.3. Definitions.

(a) *Two lines* $\mathcal{D}$ *,* $\mathcal{D}'$ *are said to be concurrent if their intersection consists of exactly one point.*

(b) *A plane* $\mathcal{P}$ *is a set of points that can be realized as the union of a family of lines* (UV) *such that* U *describes a line* $\mathcal{D}$ *and* V *a line* $\mathcal{D}'$*, for some concurrent lines* $\mathcal{D}$ *and* $\mathcal{D}'$ *in space. If* A*,* B*,* C *are 3 non aligned points, we denote by* (ABC) *the plane defined by the lines* $\mathcal{D} = (AB)$ *and* $\mathcal{D}' = (AC)$ *(say).*[23]

(c) *Two lines* $\mathcal{D}$ *and* $\mathcal{D}'$ *are said to be parallel if they coincide, or if they are both contained in a certain plane* $\mathcal{P}$ *and do not intersect.*

(d) *A salient angle* $\widehat{BAC}$ *(or a salient angular sector) defined by two non opposite half-lines* $[A, B)$*,* $[A, C)$ *with the same origin is the set obtained as the union of the family of segments* $[U, V]$ *with* $U \in [A,B)$ *and* $V \in [A,C)$*.*

(e) *A reflex angle (or a reflex angular sector)* $\overparen{BAC}$ *is the complement of the corresponding salient angle* $\widehat{BAC}$ *in the plane* (ABC)*, in which we agree to include the half-lines* $[A, B)$ *and* $[A, C)$ *in the boundary.*

(f) *Given a line* $\mathcal{D}$ *and a point* M *outside* $\mathcal{D}$ *, the half-plane bounded by* $\mathcal{D}$ *containing* M *is the union of the two angular sectors* $\widehat{BAM}$ *and* $\widehat{CAM}$ *obtaained by expressing* $\mathcal{D}$ *as the union of two opposite half-lines* $[A, B)$ *and*

22 Of course, this long series of definitions is merely intended to explain the sequence of concepts in a logical order. When teaching to pupils, it would be necessary to approach the concepts progressively, to give examples and illustrations, to let the pupils solve exercises and produce related constructions with instruments (ruler, compasses...).

23 In a general manner, one could define by induction on n the concept of an affine subspace S_n of dimension n : this is the set obtained as the union of a family of lines (UV), where U describes a line D and V describes an affine subspace S_{n-1} of dimension $n-1$ interecting D in exactly one point. Our definitions are valid in any dimension (even in an infinite dimenional ambient space), without taking special care !

$[A, C)$; *this is the union of all segments* $[U, V]$ *such that* $U \in \mathcal{D}$ *and* $V \in [A, M)$. *The opposite half-plane is the one associated with the half-line* $[A, M')$ *opposite to* $[A, M)$. *In that situation, we also say that we have flat angles of vertex* A.

(g) *In a given plane* $\mathcal{P}$, *a circle of center* A *and radius* $R > 0$ *is the set of points* M *in the plane* $\mathcal{P}$ *such that* $d(A, M) = AM = R$.

(h) *A circular arc is the intersection of a circle with an angular sector, the vertex of which is the center of the circle.*

(i) *The measure of an angle (in degrees) is proportional to the length of the circular arc that it intercepts on a circle whose center coincides with the vertex of the angle, in such a way that the full circle corresponds to* $360°$. *A flat angle (cut by a half-plane bounded by a diameter of the circle) corresponds to an arc formed by a half-circle and has measure* $180°$. *A right angle is one half of a flat angle, that is, an angle corresponding to the quarter of a circle, in other words, an angle of measure equal to* $90°$.

(j) *Two half-lines with the same origin are said to be perpendicular if they form a right angle*[24].

The usual properties of parallel lines and of angles intercepted by such lines ("corresponding angles" vs "alternate angles") easily leads to establishing the value of the sum of angles in a triangle (and, from there, in a quadrilateral).

Definition (i) requires of course a few comments. The first and most obvious comment is that one needs to define what is the length of a circular arc, or more generally of a curvilign arc : this is the limit (or the upper bound) of the lengths of polygonal line inscribed in the curve, when the curve is divided into smaller and smaller portions (cf. 2.2)[25]. The second one is that the measure of an angle

24 The concepts of right and flat angles, as well as the notion of half angle are already primary school concerns. At this level, the best way to address these issues is probably to let pupils practice paper folding (the notion of horizontality and verticality are relative concepts, it is better to avoid them when introducing perpendicularity, so as to avoid any potential confusion).

25 The definition and existence of limits are difficult issues that cannot be addressed before

is independent of the radius R of the circle used to evaluate arc lengths; this follows from the fact that arc lengths are proportional to the radius R, which itself follows from Thales' theorem (see below).

Moreover, a proportionality argument yields the formula for the length of a circular arc located on a circle of radius R : a full arc (360°) has length $2\,\pi\,R$, hence the length of an arc of 1° is 360 times smaller, that is $2\,\pi\,R\,/\,360 = \pi\,R\,/\,180$, and an arc of measure a (in degrees) has length

$$l = (\pi\,R\,/\,180)\times a = R\times a\times\pi\,/\,180.$$

3.2. Construction with instruments and isometry criteria for triangles

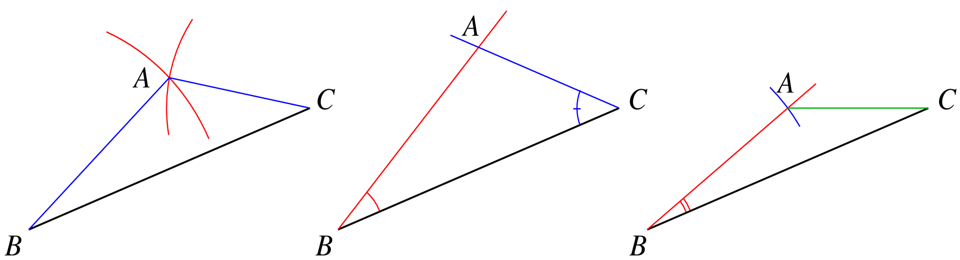
As soon as they are introduced, it is extremely important to illustrate geometric concepts with figures and construction activities with instruments. Basic constructions with ruler and compasses, such as midpoints, medians, bissectors, are of an elementary level and should be already taught at primary school. The step that follows immediately next consists of constructing perpendiculars and parallel lines passing through a given point.

At the beginning of junior high school début du collège, it becomes possible to consider conceptually more advanced matters, e.g. The problem of constructing a triangle ABC with a given base BC and two other elements, for instance :

(a) the lengths of sides AB and AC,

(b) the measures of angles $\widehat{ABC}$ and $\widehat{ACB}$,

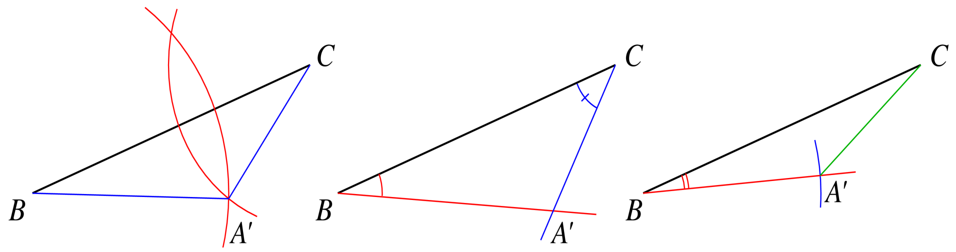
(c) the length of AB and the measure of angle $\widehat{ABC}$.



In the first case, the solution is obtained by constructing circles of centers B, C

high school, but it seems appropriate to introduce this idea at least intuitively.

and radii equal to the given lengths AB and AC, in the second case a protractor is used to draw two angular sectors with respective vertices B and C, in the third case one draws an angular sector of vertex B and a circle of center B. In each case it can be seen that there are exactly two solutions, the second solution being obtained as a triangle $A'BC$ that is symmetric of ABC with respect to the line (BC) :



One sees that the triangles ABC and $A'BC$ have in each case sides with the same lengths. This leads to the important concept of *isometric figures.*

3.2.4. Definition.

(a) *One says that two triangles are isometric if the sides that are in correspondence have the same lengths, in such a way that if the first triangle has vertices A, B, C and the corresponding vertices of the second one are A', B', C', then $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $C'A' = CA$.*

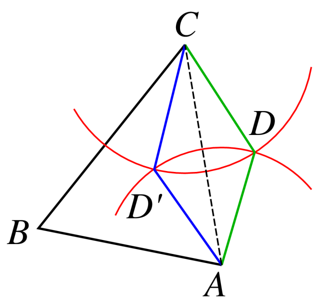
(b) *More generally, one says that two figures in a plane or in space are isometric, the first one being defined by points A_1, A_2, A_3, A_4 ... and the second one by corresponding points A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, ... if all mutual distances $A'_iA'_j = A_iA_j$ coincide.*

The concept of isometric figures is related to the physical concept of *solid body:* a body is said tto be a solid if the mutual distances of its constituents (molecules, atoms) do not vary while the object is moved; after such a move, atoms which occupied certain positions A_i occupy new positions A'_i and we have $A'_iA'_j = A_iA_j$. This leads to a rigorous definition of solid displacements, that have a meaning from the viewpoints of mathematics and physics as well.

3.2.5. Definition. *Given a geometric figure (or a solid body in space) defined by characteristic points A_1, A_2, A_3, A_4 ..., a solid move is a continuous succession of positions $A_i(t)$ of these points with respect to the time t, in such a way that all distances $A_i(t)A_j(t)$ are constant. If the points A_i were the initial positions and the points A'_i are the final positions, we say that the figure $(A'_1 A'_2 A'_3 A'_4 \ldots)$ is obtained by a displacement of figure $(A_1\, A_2\, A_3\, A_4 \ldots)$.*[26]

Beyond displacements, another way of producing isometric figures is to use a reflection (with respect to a line in a plane, or with respect to a plane in space, as obtained by taking the image of an object through reflection in a mirror)[27]. This fact is already observed with triangles, the use of transparent graph paper is then a good way of visualizing isometric triangles that cannot be superimposed by a displacement without "getting things out of the plane" ; in a similar way, it can be useful to construct elementary solid shapes (e.g. non regular tetrahedra) that cannot be superimposed by a solid move.

3.2.6. Exercise. In order to ensure that two quadrilaterals $ABCD$ and $A'B'C'D'$ are isometric, it is not sufficient to check that the four sides $A'B' = AB$, $B'C = BC$, $CD' = CD$, $D'A' = DA$ possess equal lengths, one must also check that the two diagonals $A'C = AC$ and $B'D' = BD$ be equal ; equaling only one diagonal is not enough as shown by the following construction :



26 The concept of continuity that we use is the standard continuouty property for functions of one real variable - one can of course introuduce this only intuitively at the junior high school level. One can further show that an isometry between two figures or solids extends an affine isometry of the whole space, and that a solid move is represented by a positive affine isometry, see Section 10. The formal proof is not very hard, but certainly cannot be given before the end of high school (this would have been possible with the rather strong French curricula as they were 50 years ago in the grade 12 science class, but doing so would be nowadays completely impossible).

27 Conversely, an important theorem – which we will show later (see section 10) says that isometric figures can be deduced from each other either by a solid move or by a solid move preceded (or followed) by a reflection.

The construction problems considered above for triangles lead us to state the following fundamental isometry criteria.

3.2.7. Isometry criteria for triangles[28]. *In order that two triangles be isometric, it is necessary and sufficient to check one of the following cases*

(a) *that the three sides be respectively equal* (*this is just the definition*)*, or*

(b) *that they possess one angle with the same value and its adjacent sides equal, or*

(c) *that they possess one side with the same length and its adjacent angles of equal values.*

One should observe that conditions (b) and (c) are not sufficient if the adjacency specification is omitted – and it would be good to introduce (or to let pupils perform) constructions demonstrating this fact. A use of isometry criteria in conjunction with properties of alternate or corresponding angles leads to the various usual characterizations of quadrilaterals – parallelograms, lozenges, rectangles, squares...

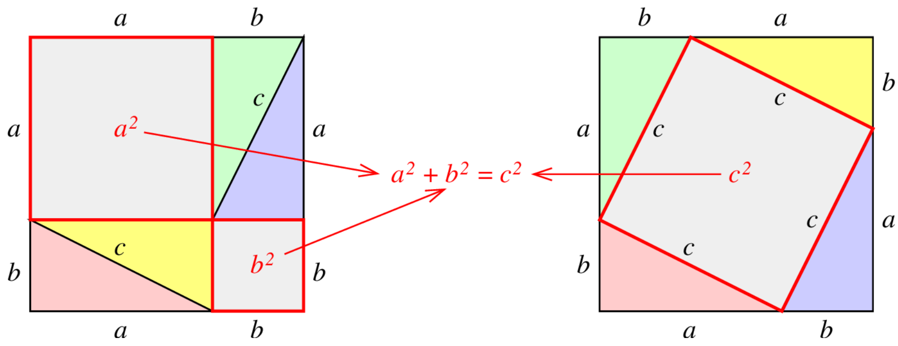
3.3. Pythagoras' theorem

We first give the classical "Chinese" proof of Pythagoras' theorem, which is derived by a simple area argument based on moving four triangles (represented here in green, blue, yellow and light red). Its main advantage is to be visual and convincing[29].

---

28 A rigorous formal proof of of these 3 isometry criteria will be given later, cf. Section 8.

29 Again, in our context, the argument that will be described here is a justification rather than a formal proof. In fact, it would be needed to prove that the quadrilateral central figure on the right hand side is a square – this could certainly be checked with isometry properties of triangles - but one should not forget that they are not yet really proven at this stage. More seriously, the argument uses the concept of area, and it would be needed tp prove the existence of an area measure in the plane with all the desired properties : additivity by disjoint unions, translation invariance ...

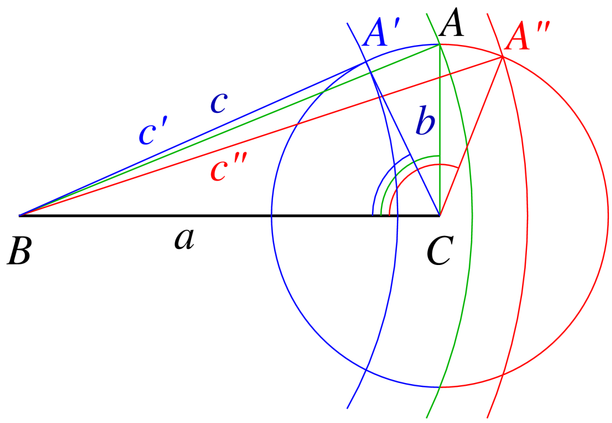


The point is to compare, in the left hand and righ hand figures, the remaining grey area, which is the difference of the area of the square of side $a + b$ with the area of the four rectangle triangles of sides a, b, c. The equality if the grey areas implies $a^2 + b^2 = c^2$.

Complement. *Let* (ABC) *be a triangle and a, b, c the lengths of the sides that are opposite to vertices A, B, C.*

(i) *If the angle* $\widehat{C}$ *is smaller than a right angle, we have* $c^2 < a^2 + b^2$.

(ii) *If the angle* $\widehat{C}$ *is larger than a right angle, we have* $c^2 > a^2 + b^2$.



Proof. First consider the case where (ABC) is rectangle: we have $c^2 = a^2 + b^2$ *and the angle* $\widehat{C}$ is equal to 90°. We argue by either increasing or decreasing the angle $\widehat{C}$: if angle $\widehat{C}$ is < 90°, we have $c' < c$; if angle $\widehat{C}$ is > 90°, we have $c'' >$

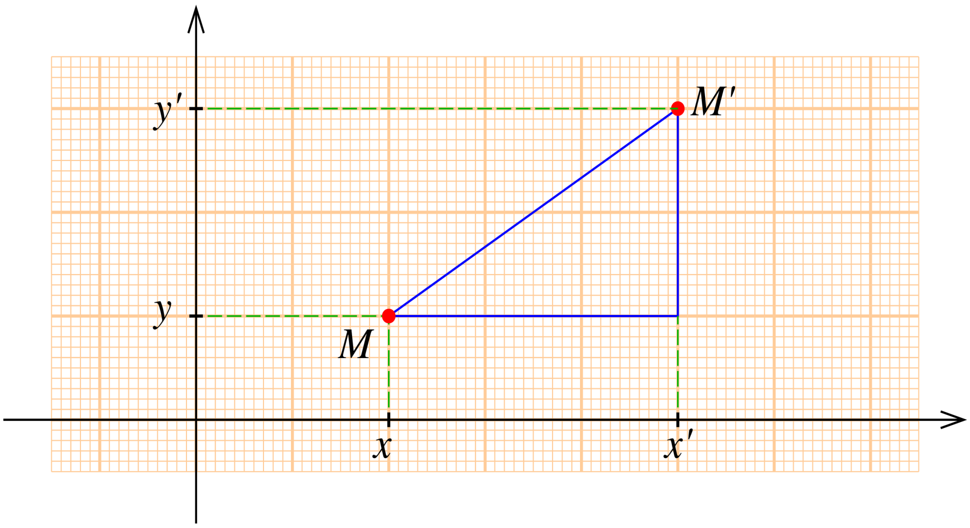
c. By this reasoning, we conclude :

Converse of Pythagoras' theorem. *With the above notation, if* $c^2 = a^2 + b^2$, *then* $\widehat{C}$ *must be a right angle, hence the given triangle is rectangle in C.*

4. CARTESIAN COORDINATES IN THE PLANE

The next fundamental stem of our approach is the introduction of cartesian coordinates and their use to give *formal proofs of properties that had previously been taken for granted* (or given with a partial justification only). This is done by working in orthonormal frames.

4.1. Expression of Euclidean distance



Pythagoras' theorem shows that the hypotenuse MM' is given by the formula $MM'^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$, as the two sides of the right angle are $x' - x$ and $y' - y$ (up to sign). The distance from M to M' is given therefore by

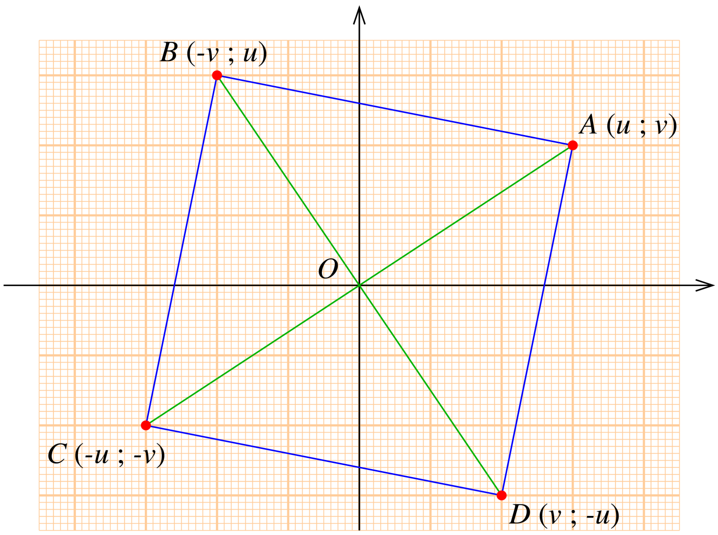
$$d(M, M') = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2} \qquad (4.1.1)$$

(It is of course advisable to first present the argument with simple numerical values).

4.2. Squares

Let us consider the figure formed by points $A(u; v)$, $B(-v ; u)$, $C(-u ; -v)$, $D(v ; -u)$. Formula (4.1.1) yields

$$AB^2 = BC^2 = CD^2 = DA^2 = (u + v)^2 + (u - v)^2 = 2(u^2 + v^2),$$



hence the four sides have the same length, equal to $\sqrt{2}\,\sqrt{u^2+v^2}$. Similarly, we find

$$OA = OB = OC = OD = \sqrt{u^2+v^2},$$

therefore the 4 isoceles triangles OAB, OBC, OCD and ODA are isometric, and as a consequence we have $\widehat{OAB} = \widehat{OBC} = \widehat{OCD} = \widehat{ODA} = 90°$ and the other angles are equal to 45°. Hence $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDA} = 90°$, and we have proved that our figure is a square.

4.3. "Horizontal and vertical" lines

The set $\mathcal{D}$ of points $M(x ; y)$ such that $y = c$ (where c is a given numerical value) is a "horizontal" line. In fact, given any three points M, M', M'' of abscissas $x < x'$

$< x''$ we have

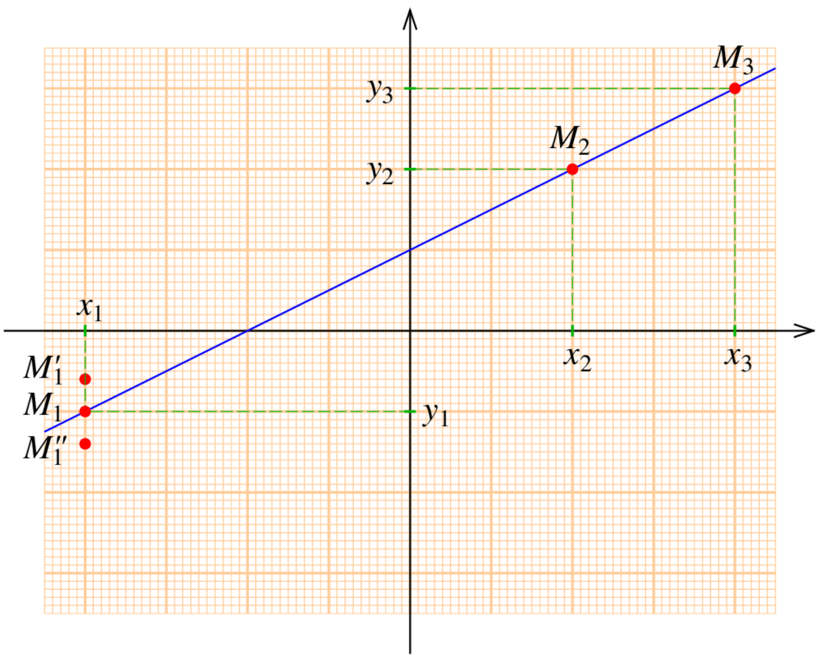
$$MM' = x' - x, \qquad M'M'' = x'' - x', \qquad MM'' = x'' - x,$$

and therefore $MM' + M'M'' = MM''$. This implies by definition that our points M, M', M'' are aligned. If we consider the line $\mathcal{D}_1$ given by the quation $y = c_1$ with $c_1 \neq c$, this is another horizontal line, and we have clearly $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_1 = \emptyset$, therefore our lines $\mathcal{D}$ and $\mathcal{D}_1$ are parallel.

Similarly, the set $\mathcal{D}$ of points $M\,(x\,;\,y)$ such that $x = c$ is a "vertical line" and the lines $\mathcal{D} : x = c$, $\mathcal{D}_1 : x = c_1$ are parallel.

4.4. Line defined by an equation $y = ax + b$

We start right away with the general case $y = ax + b$ to avoid any repetitions, but with pupils it would be of course more appropriate to treat first the linear case $y = ax$.



Consider three points $M_1\,(x_1\,;\,y_1)$, $M_2\,(x_2\,;\,y_2)$, $M_3\,(x_3\,;\,y_3)$ satisfying the relations $y_1 = ax_1 + b$, $y_2 = ax_2 + b$, $y_3 = ax_3 + b$, with $x_1 < x_2 < x_3$, say. As $y_2 -$

$y_1 = a(x_2 - x_1)$, we find

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + a^2(x_2-x_1)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2(1+a^2)} = (x_2-x_1)\sqrt{1+a^2},$$

and likewise $M_2M_3 = (x_3 - x_2)\sqrt{1+a^2}$, $M_1M_3 = (x_3 - x_1)\sqrt{1+a^2}$ - this shows that $M_1M_2 + M_2M_3 = M_1M_3$, hence our points M_1, M_2, M_3 are aligned. Moreover[30], we see that for any point $M_1'\,(x_1\,;\,y_1')$ with $y_1' > ax_1 + b$, then this point is not aligned with M_2 and M_3, and similarly for $M_1''\,(x_1\,;\,y_1'')$ such that $y_1'' < ax_1 + b$.

Consequence. *The set $\mathcal{D}$ of points $M\,(x\,;\,y)$ such that $y = ax + b$ is a line.*

The slope of line $\mathcal{D}$ is the ratio between the "height variation" and the "horizontal variation", that is, for two points $M_1\,(x_1\,;y_1)$, $M_2\,(x_2\,;y_2)$ of $\mathcal{D}$ the ratio

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a.$$

A horizontal line is a line of slope $a = 0$. When the slope a becomes very large, the inclination of the line $\mathcal{D}$ becomess intuitively close to being vertical. We therefore agree that conviendra a vertical line has infinite slope. Such an infinite value will be denoted by the symbol ∞ (without sign).

Consider two distinct points $M_1\,(x_1\,;y_1)$, $M_2\,(x_2\,;y_2)$ – If $x_1 \neq x_2$, we see that there exists a unique line $\mathcal{D}$: $y = ax + b$ passing through M_1 and M_2 : its slope is given by $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a.$ and we infer $b = y_1 - ax_1 = y_2 - ax_2$. If $x_1 = x_2$, the unique line $\mathcal{D}$ passing through M_1, M_2 is the vertical line of equation $x = x_1$.

4.5. Intersection of two lines defined by their equations

Consider two lines $\mathcal{D}$: $y = ax + b$ and $\mathcal{D}'$: $y = a'x + b'$. In order to find the

30 A rigorous formal proof would of course be possible by using a distance calculation, but this is much less obvious thanwhat we have done until now. One could however argue as in § 5.2 and use a new coordinate frame to reduce the situation to the case of the horintal line $Y = 0$, in which case the proof is much easier.

intersection $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ we write $y = ax + b = a'x + b'$, and get in this way $(a' - a)x = -(b' - b)$. Therefore, if $a \neq a'$ there is a unique intersection point $M(x\,;y)$ such that

$$x = -\frac{b'-b}{a'-a}, \qquad y = ax + b = \frac{-a(b'-b)+b(a'-a)}{a'-a} = \frac{ba'-ab'}{a'-a}.$$

The 'intersection of $\mathcal{D}$ with a vertical line $\mathcal{D}'$: $x = c$ is still unique, as we immediately find the solution x = c, $y = ac + b$. From this discussion, we can conclude :

Theorem. *Two lines $\mathcal{D}$ and $\mathcal{D}'$ possessing distinct slopes a, a' have a unique intersection point: we say that they are concurrent lines.*

On the contrary, if $a = a'$ and moreover $b \neq b'$, there is no possible solution, hence $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \varnothing$, our lines are distinct parallel lines. If $a = a'$ and $b = b'$, the lines $\mathcal{D}$ and $\mathcal{D}'$ are equal, and they are still considered as being parallel.

Consequence 1. *Two lines $\mathcal{D}$ and $\mathcal{D}'$ of slopes a, a' are parallel if and only if their slopes are equal (finite or infinite).*

Consequence 2. *If $\mathcal{D}$ is parallel to $\mathcal{D}'$ and if $\mathcal{D}'$ is parallel to $\mathcal{D}''$, then $\mathcal{D}$ is parallel to $\mathcal{D}''$.*

Proof. In fact, if $a = a'$ and $a' = a''$, then $a = a''$.

We can finally prove "Euclid's parallel postulate" (in our approach, this is indeed a rather obvious theorem, and not a postulate !)

Consequence 3. *Given a line $\mathcal{D}$ and a point M_0, there is a unique line $\mathcal{D}'$ parallel to $\mathcal{D}$ that passes through M_0.*

Proof. In fact, if $\mathcal{D}$ has a slope a and if $M_0\,(x_0\,;\,y_0)$, we see that

– for $a = \infty$, the unique possible line is the line $\mathcal{D}'$ of equation $x = x_0$,

– for $a \neq \infty$, the line $\mathcal{D}'$ has an equation $y = ax + b$ with $b = y_0 - ax_0$, therefore $\mathcal{D}'$ is the line that is uniquely defined by the equation $\mathcal{D}' : y - y_0 = a(x - x_0)$.

4.6. Orthogonality condition for two lines

Let us consider a line passing through the origin $\mathcal{D} : y = ax$. Select a point $M(u\,;\,v)$ located on $\mathcal{D}$, $M \neq O$, that is $u \neq 0$. Then $a = \frac{v}{u}$. We know that the point $M'(u'\,;\,v') = (-v\,;\,u)$ is such that the lines $\mathcal{D} = (OM)$ and (OM') perpendicular, thanks to the construction of squares presented in section 4.2. Therefore, the slope of the line $\mathcal{D}' = (OM')$ perpendicular to $\mathcal{D}$ is given by

$$a' = \frac{v'}{u'} = \frac{u}{-v} = -\frac{u}{v} = -\frac{1}{a}$$

if $a \neq 0$. If $a = 0$, the line $\mathcal{D}$ coincides with the horizontal axis, its perpencular through O is the vertical axis of infinite slope. The formula $a' = -\frac{1}{a}$ is still true in that case if we agree that $\frac{1}{0} = \infty$ (let us repeat again that here ∞ means an infinite non signed value).

Consequence 1. *Two lines $\mathcal{D}$ and $\mathcal{D}'$ of slopes a, a' are perpendicular if and only if their slopes satisfy the condition : $a' = -1/a$ if and only if $a = -1/a'$ (agreeing that $\frac{1}{\infty} = 0$ and $\frac{1}{0} = \infty$).*

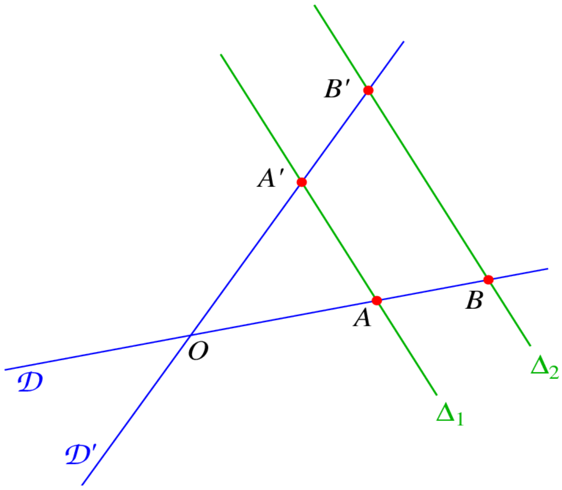
Consequence 2. *If $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}'$ and $\mathcal{D}' \perp \mathcal{D}''$* then $\mathcal{D}$ and $\mathcal{D}''$ *are parallel.*

Proof. In fact, the slopes satisfy $a = -1/a'$ hence $a'' = -1/a'$, and so $a'' = a$.

□

4.7. Thales' theorem

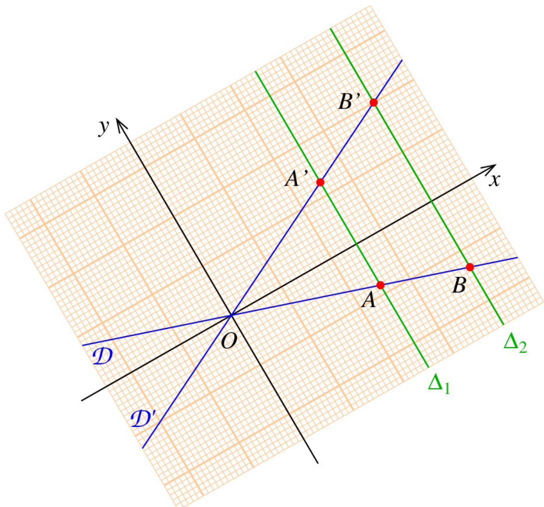
We start by stating a "Euclidean version" of the theorem, involving ratios of distances rather than ratios of algebraic measures.



Thales' theorem. *Consider two concurrent lines $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ intersecting in a point O, and two parallel lines Δ_1, Δ_2 that intersect $\mathcal{D}$ in points A, B, and $\mathcal{D}'$ in points A′, B′ ; we assume that A,B, A′, B′ are different from O. Then the length ratios satisfy*

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'} = \frac{BB'}{AA'}.$$

Proof. We argue by means of a coordinate calculation, in an orthonormal frame Oxy such that Ox is perpendicular to lines Δ_1, Δ_2, and Oy is parallel to lines Δ_1, Δ_2.



In these coordinates, lines Δ_1, Δ_2 are "vertical" lines of respective equations $\Delta_1 : x = c_1$, $\Delta_2: x = c_2$ with $c_1, c_2 \neq 0$, and our lines $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ admit respective equations $\mathcal{D}: y = ax$, $\mathcal{D}' : y = a'x$. Therefore

$$A\,(c_1\,;\,ac_1),\qquad B\,(c_2\,;\,ac_2),\qquad A'\,(c_1\,;\,a'c_1),\qquad B'\,(c_2\,;\,a'c_2).$$

By Pythagoras' theorem we infer (after taking absolute values) :

$$OA = |c_1|\sqrt{1+a^2},\quad OB = |c_2|\sqrt{1+a^2},\quad OA' = |c_1|\sqrt{1+a'^2},\quad OB' = |c_2|\sqrt{1+a'^2}$$

$$AA' = |(a'-a)c_1|,\quad BB' = |(a'-a)c_2|.$$

We have $a' \neq a$ since $\mathcal{D}$ and $\mathcal{D}'$ are concurrent by our assumption, hence $a' - a \neq 0$, and we then conclude easily that

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'} = \frac{BB'}{AA'} = \frac{|c_2|}{|c_1|}.$$

In a more precise manner, if we choose orientations on $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ so as to turn them into axes, and also an orientation on Δ_1 and Δ_2, we see that in fact we have an equality of algebraic measures

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}}.$$

Converse of Thales' theorem. *Let $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ be concurrent lines intersecting in O. If Δ_1 intersects $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ in distinct points A, A', and Δ_2 intersects $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ in distinct points B, B' and if*

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}}$$

then Δ_1 and Δ_2 are parallel.

Proof. It is easily obtained by considering the line δ_2 parallel to Δ_1 that passes through B, and its intersection point β' with $\mathcal{D}'$. We then see that $\overline{O\beta'} = \overline{OB'}$, hence $\beta' = B'$ and $\delta_2 = \Delta_2$, and as a consequence $\Delta_2 = \delta_2 \,//\, \Delta_1$. □

4.8. Consequences of Thales and Pythagoras theorems

The conjunction of isometry criteria for triangles and Thales and Pythagoras theorems already allows (in a very classical way !) to establish many basic theorems of elementary geometry. An important concept in this respect is the concept of similitude.

Definition. *Two figures* $(A_1\, A_2\, A_3\, A_4 \ldots)$ *and* $(A'_1 A'_2 A'_3 A'_4 \ldots)$ *are said to be similar in the ratio* k $(k > 0)$ *if we have* $A'_i A'_j / A_i A_j = k$ *for all segments* $[A_i, A_j]$ *and* $[A'_i, A'_j]$ *that are in correspondence.*

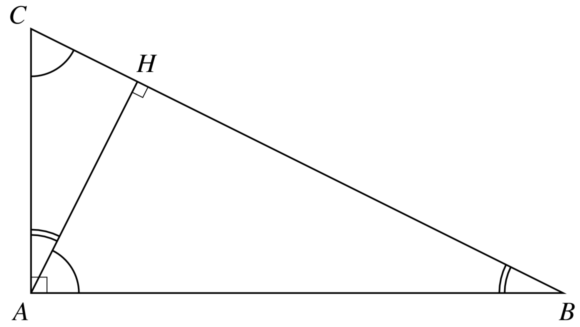
An important case where similar figures are obtained is by applying a homothety with a given center, say point O : if O is chosen as the origin of coordinates and if to each point M $(x\,;y)$ we associate the point M' $(x'\,;y')$ such that $x' = kx$, $y' = ky$, then formula (4.1.1) shows that we indeed have $A'B' = |k|\, AB$, hence by assigning to each point A_i the corresponding point A'_i we obtain similar figures in the ratio $|k|$; this situation is described by saying that we have homothetic figures in the ratio k ; this ratio can be positive or negative (for instance, if $k = -1$, this is a central symmetry with respect to O). The isometry criteria for triangles immediately extend into criteria for similarity.

Similarity criteria for triangles. *In order to conclude that two triangles are similar, ii is necessary and sufficient that one of the following conditions is met* :

(a) *the corresponding three sides are proportional in a certain ratio* $k > 0$ (*this is the definition*);

(b) *the triangles have a corresponding equal angle and the adjacent sides are proportional* ;

(c) *the triangles have two equal angles in correspondence.*



An interesting application of the similarity criteria consists in stating and proving the basic metric relations in rectangle triangles : if the triangle *ABC* is rectangle in *A* and if *H* is the foot of the altitude drawn from vertex *A,* we have the basic relations

$$AB^2 = BH \cdot BC, \quad AC^2 = CH \cdot CB, \quad AH^2 = BH \cdot CH, \quad AB \cdot AC = AH \cdot BC.$$

In fact (for example) the similarity of rectangle triangles *ABH* and *ABC* leads to the equality of ratios

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \implies AB^2 = BH \cdot BC.$$

One is also led in a natural way to the definition of sine, cosine and tangent of an acute angle in a rectangle triangle.

Definition. *Consider a triangle ABC that is rectangle in A. On defines*

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}, \qquad \sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}, \qquad \tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}.$$

In fact, the ratios only depend on the angle $\widehat{ABC}$ (which also determines uniquely the complementary angle $\widehat{ACB} = 90° - \widehat{ABC}$), since rectangle triangles that share a common angle else than their right angle are always similar by criterion (c). Pythagoras' theorem then quickly leads to computing the values of cos, sin, tan for angles with "remarkable values" 0°, 30°, 45°, 60°, 90°.

4.9. Computing areas and volumes

It is possible – and therefore probably desirable - to justify many basic formulas concerning areas and volumes of usual shapes and solid bodies (cylinders, pyramids, cones, spheres), just by using Thales and Pythagoras theorems, combined with elementary geometric arguments[31]. We give here some indication on such techniques, in the case of cones and spheres. The arguments are close to those developed by Archimedes more than two centuries BC (except that we take here the liberty of reformulating them in modern algebraic notations).

The volume of a cone with an arbitrary plane base of area A and height h is given by

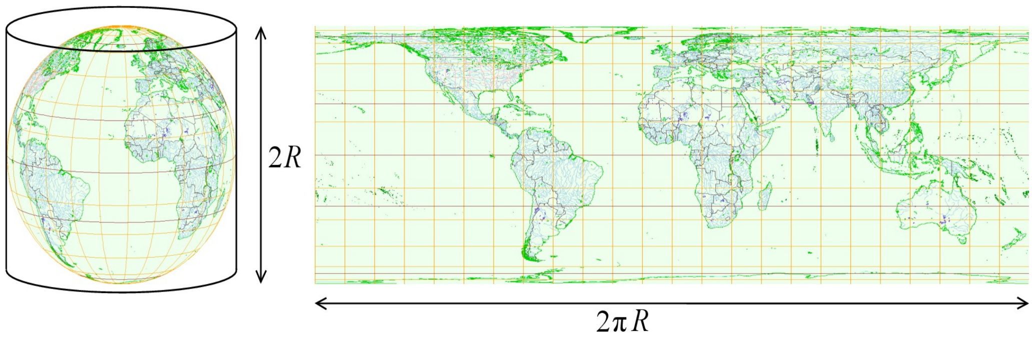
$$V = \frac{1}{3}Ah. \tag{4.9.1}$$

One can indeed argue by a dilation argument that the volume V is proportional to h, and one also shows that is is proportional to A by approximating the base with a union of small squares. The proof is then reduced to the case of an oblique pyramid (i.e. to the case when the base is a rectangle). The coefficient $\frac{1}{3}$ is justified by observing that a cube can be divided in three identical oblique pyramids, whose summit is one of the vertices of the cube and the bases are the 3 adjacent opposite faces. The altitude of these pyramids is equal to the side of the cube, and their volume is thus $\frac{1}{3}$ of the volume of the cube.

Archimedes formula for the area of a sphere. Since any two spheres of the same radius are isometric, their area depends only on the radius R. Let us take the center O of the sphere as the origin, and consider the "vertical" cylinder of radius R tangent to the sphere along the equateur, and more precisely, the portion of cylinder located between the "horizontal" planes $z = -R$ and $z = R$.

31 We are using here the word "justify" rather than "prove" because the necessary theoretical foundations (e.g. measure theory) are missing - and will probably be missing for 5–6 years or more. But in reality, one can see that these justifications can be made perfectly rigorous once the foundations considered here as intuitive are rigorously established. The theory of Hausdorff measures can be used e;G. To give a rigorous definition of the p-dimensional measure of any object in a metric space, even when p is not an integer.

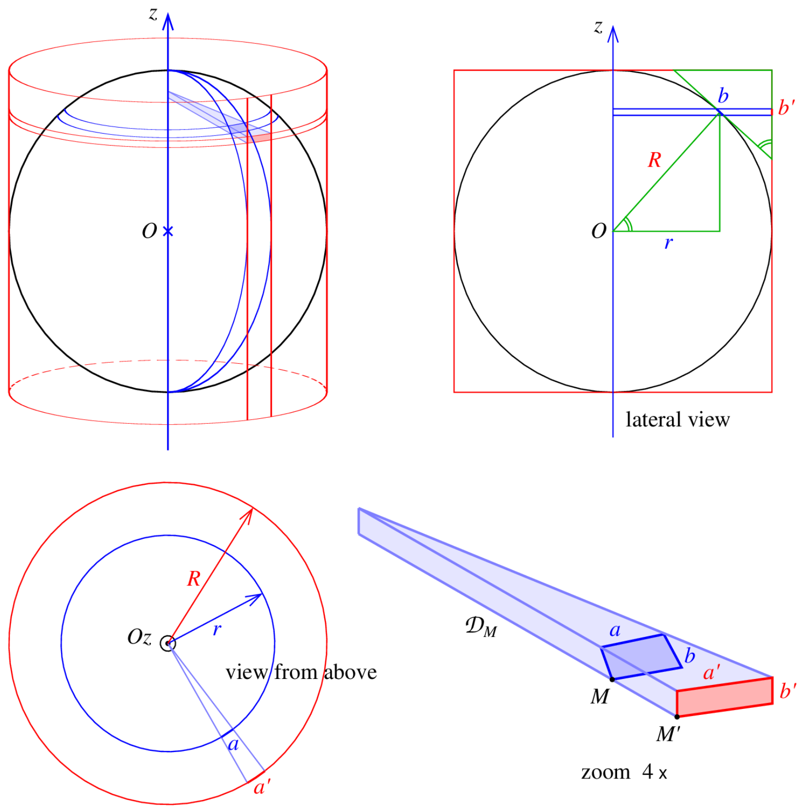
We use a "projection" of the sphere to the cylinder : for each point M of the sphere, we consider the point M' on the cylinder which is the intersection of the cylinder with the horizontal line $\mathcal{D}_M$ passing by M and intersection the Oz axis. This projection is actually one of the simplest possible cartographic representations of the Earth. After cutting the cylinder along a meridian (say the meridian of longitude 180°), and unrolling the cylinder into a rectangle, we obtain the following cartographic map.



We are going to check that the cylindrical projection preserves areas, hence that the area of the sphere is equal to that of the corresponding rectangular map of sides $2R$ and $2\,\pi\,R$:

4.9.2) $$A = 2R \times 2\pi R = 4\,\pi\,R^2.$$

In order to check that the areas are equal, we consider a "rectangular field" delimited by parallel and meridian lines, of very small size with respect to the sphere, in such a way that it can be seen as a planar surface, i.e. to a rectangle (for instance, on Earth, one certainly does not realize the rotundity of the globe when the size of the field does not exceed a few hundred meters).



Let *a, b* be the side lengths of our "rectangular field", respectively along parallel lines direction and meridian lines direction, and a', b' the side lengths of the corresponding rectangle projected on the tangent cylinder.

In the view from above, Thales' theoreme immediately implies

$$\frac{a'}{a} = \frac{R}{r}.$$

In the lateral view, the two triangles represented in green are homothetic (they share a common angle, as the adjacent sides are perpendicular to each other). If we apply again Thales' theorem to the tangent triangle and more specifically to the sides adjacent to the common angle, we get

$$\frac{b'}{b} = \frac{\text{adjacent side}}{\text{hypotenuse}} = \frac{r}{R}.$$

The product of these equalities yields

$$\frac{a' \times b'}{a \times b} = \frac{a'}{a} \times \frac{b'}{b} = \frac{R}{r} \times \frac{r}{R} = 1.$$

We conclude from there that the rectangle areas $a \times b$ and $a' \times b'$ are equal. This implies that the cylindrical projection preserves areas, and formula (4.9.2) follows.

5. AN AXIOMATIC APPROACH OF EUCLIDIAN GEOMETRY

Although we HAVE been able to follow a deductive presentation when it is compared to some of the more traditional approaches - almost all of the statements were "proven" from the definitions - it should nevertheless be observed that some proofs relied merely on intuitive facts – this was for instance the case of the "proof" of Pythagoras' Theorem. The only way to break the vicious circle is to take some of the facts that we feel necessary to use as "axioms", that is to say, to consider them as assumptions from which we first deduct all other properties by logical deduction ; a choice of other assumptions as our initial premises leads to non-Euclidean geometries (see section 10).

As we shall see, the notion of a Euclidean plane can be defined using a single axiom, essentially equivalent to the conjunction of Pythagoras' Theorem - which was only partially justified - and the existence of Cartesian coordinates – which we had not discussed either. In case the idea of using an axiomatic approach would look frightening, we want to stress that this section may be omitted altogether - provided pupils are somehow led to understand that the coordinate systems can be changed (translated, rotated, etc.) as needed.

5.1. The "Pythagoras / Descartes" model

In our vision, plane Euclidian geometry is based on the following "axiomatic definition".

Definition. *What we will call a Euclidian plane is a set of points denoted $\mathcal{P}$, for* *which mutual distances of points are supposed to be known, i.e. there is a predefined function*

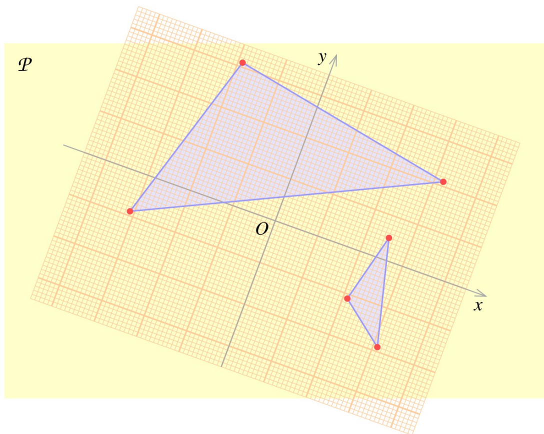
$$d : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}_+, \qquad (M, M') \mapsto d(M, M') = MM' \geq 0,$$

and we assume that there exist "orthonormal coordinate systems" : to each point $M \in \mathcal{P}$ one can assign a pair of coordinates $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$, by means of a one-to-one correspondence $M \mapsto (x\,;\,y)$ satisfying the axiom[32]

(Pythagoras / Descartes) $\qquad d(M, M') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$

for all points M $(x\,;\,y)$ and M' $(x'\,;\,y')$.

It is certainly a good practice to represent the choice of an orthonomal coordinate system by using a transparent sheet of graph paper and placing it over the paper sheet that contains the working area of the Euclidean plane (here that area contains two triangles depicted in blue, above which the transparent sheet of graph paper has been placed).



32 As we will try to convince the reader in the sequel, this is a complete and perfectly rigorous description of Euclidean geometry, that is actually equivalent to the long compilation of axioms presented at more advanced university levels : vector space of dimension 2 over real numbers, affine plane associated to it, equipped with a positive definite symmetric bilinear form providing the Euclidean structure. At this point, the reader will probably realize how drastically simpler what we call the Pythagoras/Descartes axiom is ! The same definition could be used to introduce higher dimensional Euclidean spaces, just by taking coordinates $(x_1, \ldots, x_n)$ instead. Hyperbolic geometry, in the model of the Poincaré disk, would consist in assigning to every point M of $\mathcal{P}$ a complex number $z = x+iy$ in the unit disk (complex numbers of modulus $|z| < 1$), equipped with the infinitesimal metric $|dz| / (1 - |z|^2)$ and the resulting geodesic metric, see section 10.

This already shows (at an intuitive level only at this point) that there is an infinite number of possible choices for the coordinate systems. We now investigate this in more detail.

5.1.1. Rotating the sheet of graph paper around *O* by 180°

A rotation of 180° of the graph paper around O has the effect of just changing the orientation of axes. The new coordinates $(X ; Y)$ are given with respect to the old ones by

$$X = -x, \qquad Y = -y\,.$$

Since $(-u)^2 = u^2$ for every real number u, we see that the formula

(∗) $\quad d(M, M') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$

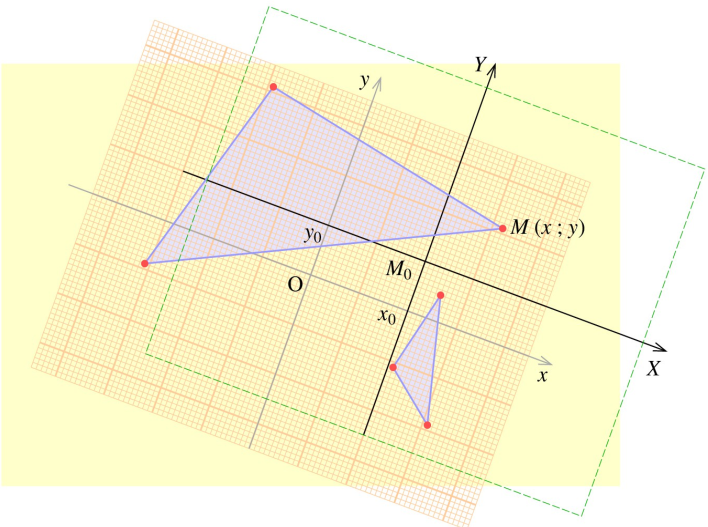
is still valid in the new coordinates, assuming it was valid in the original coordinates $(x ; y)$.

5.1.2. Reversing the sheet of graph paper along one axis

If we reverse along Ox, we get $X = -x$, $Y = y$ and formula (∗) is still true. The argument is similar when reversing the sheet along Oy.

5.1.3. Change of origin

Here we replace the origin O by an arbitrary point M_0 $(x_0 ; y_0)$



The new coordinates of point $M\,(x\,;y)$ are given by

$$X = x - x_0, \qquad Y = y - y_0.$$

For any two points M, M', we get in this situation

$$X' - X = (x' - x_0) - (x - x_0) = x' - x, \qquad Y' - Y = (y' - y_0) - (y - y_0) = y' - y,$$

and we see that formula (*) is still unchanged.

5.1.4. Rotation of axes

We will show that when the origin O is chosen, one can get the half-line Ox to pass through an aribrary point $M_1\,(x_1\,;y_1)$ distinct from O. This is intuitively obvious by "rotating" the sheet of graph paper around point O, but requires a formal proof relying on our "Pythagoras / Descartes" axiom. This proof is substantially more involved than what we have done yet, and can probably be jumped over at first - we give it here to show that there is no logical flaw in our approach. We start from the algebraic equality called *Lagrange's identity*

$$(au + bv)^2 + (-bu + av)^2 = a^2u^2 + b^2v^2 + b^2u^2 + a^2v^2 = (a^2 + b^2)(u^2 + v^2),$$

which is valid for all real numbers a, b, u, v. It can be obtained by developping

the squares on the left and observing that the double products annihilate. As a consequence, if a and b satisfy $a^2 + b^2 = 1$ (such an example is $a = 3/5$, $b = 4/5$) and if we perform the change of coordinates

$$X = ax + by\,, \qquad Y = -bx + ay$$

we get, for any two points M, M' in the plane

$$X' - X = a(x' - x) + b(y' - y), \qquad Y' - Y = -b(x' - x) + a(y' - y),$$
$$(X' - X)^2 + (Y' - Y)^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$$

by Lagrange's identity with $u = x' - x$, $v = y' - y$. On the other hand, it is easy to check that

$$aX - bY = x, \qquad bX + aY = y,$$

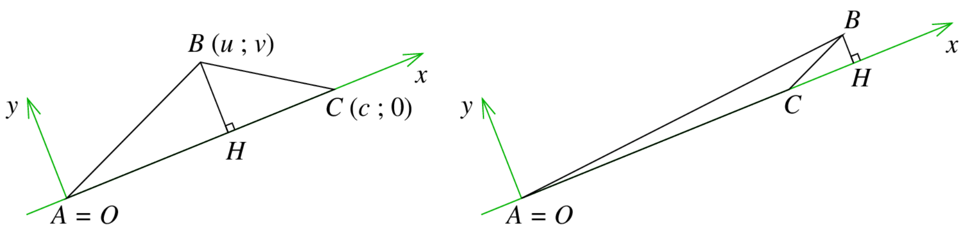
hence the assignment $(x\,;\,y) \mapsto (X\,;\,Y)$ is one-to-one. We infer from there that in the sense of our definition, $(X\,;\,Y)$ is indeed an orthonormal coordinate system. If we now choose $a = kx_1$, $b = ky_1$, the coordinates of point M_1 $(x_1;\,y_1)$ are transformed into

$$X_1 = ax_1 + by_1 = k\,(x_1 + y_1),\ Y_1 = -\,bx_1 + ay_1 = k\,(-\,y_1x_1 + x_1y_1) = 0,$$

and the condition $a^2 + b^2 = k^2(x_1^2 + y_1^2) = 1$ is satisfied by taking $k = 1/\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. Since $X_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} > 0$ and $Y_1 = 0$, the point M_1 is actually located on the half-line OX in the new coordinate system.

5.2. Revisiting the triangular inequality

The proof given in 3.1.1, which relied on facts that were not entirely settled, can now be made completely rigorous.



Given three distinct points A, B, C distincts, we select $O = A$ as the origin and the half line $[A,\,C)$ as the Ox axis. Our three points then have coordinates

$$A(0;0), \qquad B(u\,;v), \qquad C(c;0), \qquad c > 0,$$

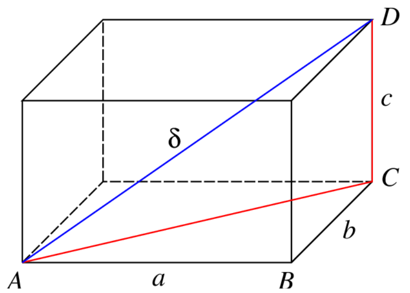
and the foot H of the altitude staring at B is $H\,(u;\,0)$. We find $AC = c$ and

$$AB = \sqrt{u^2 + v^2} \geq AH = |u| \geq u, \qquad BC = \sqrt{(c-u)^2 + v^2} \geq HC = |c-u| \geq c-u.$$

Therefore $AC = c = u + (c - u) \leq AB + BC$ in all cases. The equality only holds when we have at the same time $v = 0$, $u \geq 0$ and $c - u \geq 0$, i.e. $u \in [0, c]$ and $v = 0$, in other words when B is located on the segment $[A, C]$ of the Ox axis.

5.3. Axioms of higher dimensional affine spaces

The approach that we have described is also appropriate for the introduction of Euclidean geometry in any dimension, especially in dimension 3. The starting point is the calculation of the diagonal δ of a rectangular parallelepiped with sides *a, b, c* :



As the triangles ACD and ABC are rectangle in C and B respectively, we have

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 \quad \text{and} \quad AC^2 = AB^2 + BC^2$$

hence the "great diagonal" of our rectangle parallelepiped rectangle is given by

$$\delta^2 = AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 = a^2 + b^2 + c^2 \implies \delta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

This leads to the expression of the distance function in dimension 3

$$d(M, M') = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$$

and we can just adopt the latter in the 3-dimensional Pythagoras / Descartes axiom.

6. FOUNDATIONS OF VECTOR CALCULUS

We will work here in the plane to simplify the exposition, but the only change in higher dimension would be the appearance of additional coordinates.

6.1. Median formula

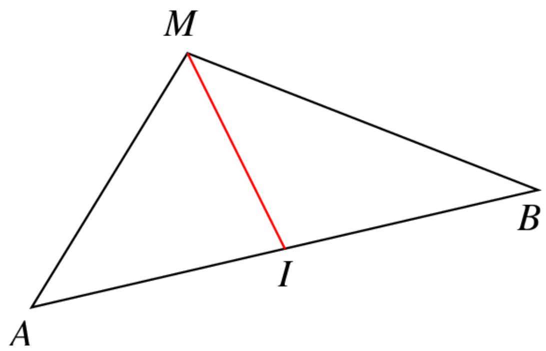
Consider points A, B with coordinates $(x_A\,;\,y_A)$, $(x_B\,;\,y_B)$ in an orthonormal frame Oxy.The point I of coordinates

$$x_A = \frac{x_A + x_B}{2}, \qquad y_A = \frac{y_A + y_B}{2}$$

satisfies $IA = IB = \frac{1}{2}AB$: this is the midpoint of segment $[A, B]$.

Median formula. *For every point* $M\,(x\,;\,y)$, *one has*

$$MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + \tfrac{1}{2}AB^2 = 2\,MI^2 + 2\,IA^2.$$



Proof. In fact, by expanding the squares, we get

$$(x - x_A)^2 + (x - x_B)^2 = 2x^2 - 2(x_A + x_B)x + x_A^2 + x_B^2\,,$$

while

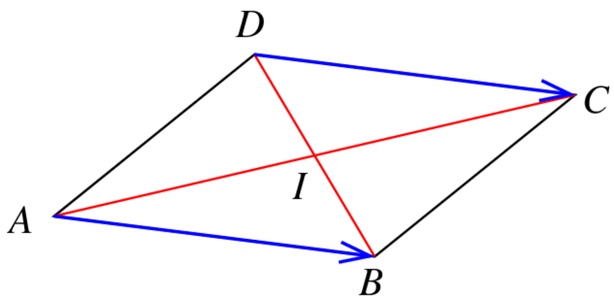
$$\begin{aligned}2(x - x_I)^2 + \frac{1}{2}(x_B - x_A)^2 &= 2(x^2 - 2x_I x + x_I^2) + \frac{1}{2}(x_B - x_A)^2\\ &= 2\Big(x^2 - (x_A + x_B)x + \frac{1}{4}(x_A + x_B)^2\Big) + \frac{1}{2}(x_B - x_A)^2\\ &= 2x^2 - 2(x_A + x_B)x + x_A^2 + x_B^2.\end{aligned}$$

The median formula is obtained by adding the analogous equality for coordinates y and applying Pythagoras' theorem.

It follows from the median formula that there is a unique point M such that $MA = MB = \frac{1}{2}AB$, in fact we then find $MI^2 = 0$, hence $M = I$. The coordinate formulas that we initially gave to define midpoints are therefore independent of the choice of coordinates.

6.2. Parallelograms

A quadrilateral $ABCD$ is a parallelogram if and only if its diagonals $[A, C]$ and $[B, D]$ intersect at their midpoint :



In this way, we find the necessary and sufficient condition

$$x_I = \frac{1}{2}(x_B + x_D) = \frac{1}{2}(x_A + x_C), \qquad y_I = \frac{1}{2}(y_B + y_D) = \frac{1}{2}(y_A + y_C),$$

which is equivalent to

$$x_B + x_D = x_A + x_C, \qquad y_B + y_D = y_A + y_C,$$

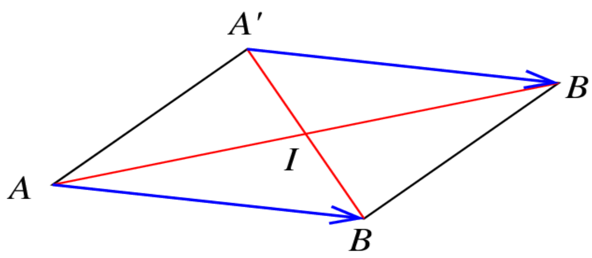
or, alternatively, to

$$x_B - x_A = x_C - x_D, \qquad y_B - y_A = y_C - y_D,$$

in other words, the variation of coordinates involved in getting from A to B is the same as the one involved in getting from D to C.

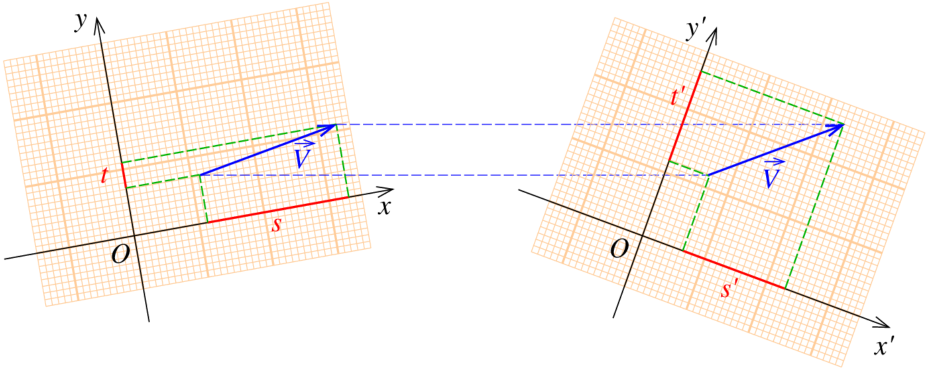
6.3. Vectors

A *bipoint* is an ordered pair (A, B) of points; we say that A is the *origin* and that B is the *extremity* of the bipoint. The bipoints (A, B) and (A', B') are said to be *equipollent* if the quadrilateral $ABB'A'$ is a parallelogram (which can possibly be a "flat" parallelogram in case the four points are aligned).

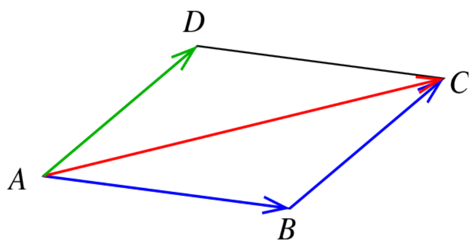


Definition. *Given two points A, B, the vector* $\overrightarrow{AB}$ *is the "variation of position" needed for getting from A to B. Given a coordinate frame Oxy, this "variation of position" is expressed along the Ox axis by* $x_B - x_A$ *and along the Oy axis by* $y_B - y_A$*. If the bipoints* (A, B) *and* (A', B') *are equipollent, the vectors* $\overrightarrow{AB}$ *and* $\overrightarrow{A'B'}$ *are equal since the variations and are the same (this is true in any coordinate system).*

The "components" of vector $\overrightarrow{AB}$ in the coordinate system Oxy are the numbers denoted in the form of an ordered pair $(x_B - x_A\,;\, y_B - y_A)$. The components $(s\,;\,t)$ of a vector $\vec{V}$ depend of course on the choice of the coordinate frame Oxy : to a given vector $\vec{V}$ one assigns different components $(s\,;\,t)$, $(s'\,;\,t')$ in different coordinate frames Oxy, $Ox'y'$.



6.4. Addition of vectors



The addition of vectors is defined by means of *Chasles' relation*

(6.4.1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

for any three points *A, B, C* : when one takes the sum of the variation of position required to get from *A* to *B*, and then from *B* to *C*, one finds the variation of position to get from *A* to *C* ; actually, we have for instance

$$(x_B - x_C) + (x_B - x_A) = x_C - x_C\ .$$

Equivalently, if *ABCD* is a parallelogram, one can also put

(6.4.2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

That (6.4.1) and (6.4.2) are equivalent follows from the fact that $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ in parallelogram *ABCD*. For any choice of coordintae frame *Oxy,* the sum of vectors of components $(s\,;\,t)$, $(s'\,;\,t')$ has components $(s+s'\,;\,t+t')$.

For every point A, the vector $\overrightarrow{AA}$ has zero componaents : it will be denoted simply $\overrightarrow{0}$. Obviously, we have $\overrightarrow{V}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{V}=\overrightarrow{V}$ for every vector $\overrightarrow{V}$. On the other hand, Chasles' relation yields

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{0}$$

for any two points A, B. Therefore we define

$$-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA},$$

in other words, the opposite of a vector is obtained by exchanging the origin and extremity of any corresponding bipoint.

6.5. Multiplication of a vector by a real number

Given a vector $\overrightarrow{V}$ *of* components $(s\,;\,t)$ in a coordintae frame Oxy and an arbitrary real number λ, we define $\lambda\overrightarrow{V}$ as the vector of components $(\lambda s\,;\,\lambda t)$.

This definition is actually independent of the coordinate frame Oxy. In fact if $\overrightarrow{V}=\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{0}$ and $\lambda\geq 0$, we have $\lambda\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ where C is the unique point located on the half-line $[A, B)$ tsuch that $AC=\lambda\, AB$. On the other hand, if $\lambda\leq 0$, we have $-\lambda\geq 0$ and

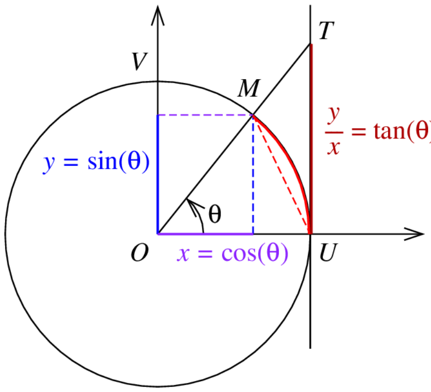
$$\lambda\overrightarrow{AB}=(-\lambda)(-\overrightarrow{AB})=(-\lambda)\overrightarrow{BA}.$$

Finally, it is clear that $\lambda\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$. Multiplication of vectors by a number is distributive with respect to the addition of vectors (this is a consequence of the distributivity of multiplication with respect to addition in the set of real numbers).

7. CARTESIAN EQUATION OF CIRCLES AND TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

By Pythagoras' thorem, the circle of center A (a, b) and radius R in the plane is the set of points M satisfying the equation

$$AM = R \iff AM^2 = R^2 \iff (x-a)^2 + (y-b) = R^2,$$



which can also be put in the form $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ with $c = a^2 + b^2 - R^2$. Conversely, the set of solutions of such an equation defines a circle of center A (a, b) and of radius $R = \sqrt{a^2+b^2} - c$ if $c < a^2 + b^2$, reduced to point A if $c = a^2 + b^2$, and empty if $c > a^2 + b^2$.

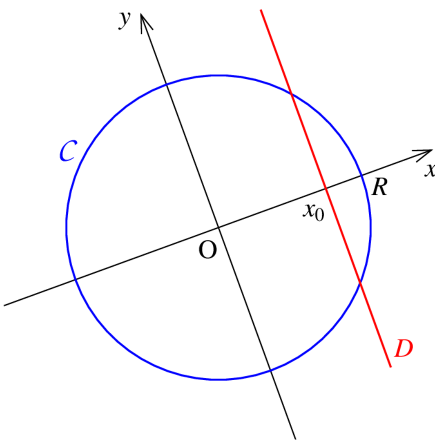
The *trigonometric circle* $\mathcal{C}$ is defined to be the unit circle centered at the origin in an orthormal coordinate system Oxy, that is, the of points M $(x ; y)$ such that $x^2 + y^2 = 1$. Let U be the point of coordinates $(1 ; 0)$ and V the point of coordinates $(0 ; 1)$. The usual trigonometric functions cos, sin and tan an then defined for arbitrary angle arguments as shown on the above figure[33]. The equation of the circle implies the relation $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$ for every θ.

8. INTERSECTION OF LINES AND CIRCLES

Let us begin by intersecting a circle $\mathcal{C}$ of center A and radius R with an arbitrary

33 It seems essential at this stage that the functions cos, sin, tan have already been introduced as theusal length ratios in rectangle triangle (in this case of acute angles at least), and that their values for the remarkable angle values 0 °, 30 °, 45 °, 60 °, 90 ° be known.

line D. In order to simplify the calculation, we take $A = O$ as the origin and we take to axis Ox to be perpendicular to the line D. The line D is then "vertical" in the oordinate frame Oxy. (We start here right away with the most general case, but, once again, it would be desirable to approach the question by treating first simple numerical examples...)



This leads to equations

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 = R^2, \qquad D : x = x_0,$$

hence

$$y^2 = R^2 - x_0^2.$$

As a consequence, if $|x_0| < R$, we have $R^2 - x_0^2 > 0$ and there are two solutions $y = \sqrt{R^2 - x_0^2}$ and $y = -\sqrt{R^2 - x_0^2}$, corresponding to two intersection points $(x_0, \sqrt{R^2 - x_0^2})$ and$(x_0, -\sqrt{R^2 - x_0^2})$ that are symmetric with respect to the Ox axis. If $|x_0| = R$, we find a single solution $y = 0$: the line $D : x = x_0$ is tangent to circle $\mathcal{C}$ at point $(x_0 ; 0)$. If $|x_0| > R$, the equation $y^2 = R^2 - x^2 < 0$ has no solution ; the line D does not intersect the circle.

Consider now the intersection of a circle $\mathcal{C}$ of center A and radius R with a circle $\mathcal{C}'$ of center A' and radius R'. Let $d = AA'$ be the distance between centers. If $d = 0$ the circles are concentric and the discussion is easy (the circles coincide if

$R = R'$, and are disjoint if $R \neq R'$). We will therefore assume that $A \neq A'$, i.e. $D > 0$. By selecting $O = A$ as the origin and $Ox = [A, A')$ as the positive x axis, we are reduces to the case where $A\ (0\ ;\ 0)$ and $A'\ (d\ ;\ 0)$. We then get equations

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 = R^2, \qquad \mathcal{C}' : (x-d)^2 + y^2 = R'^2 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = 2dx + R'^2 - d^2.$$

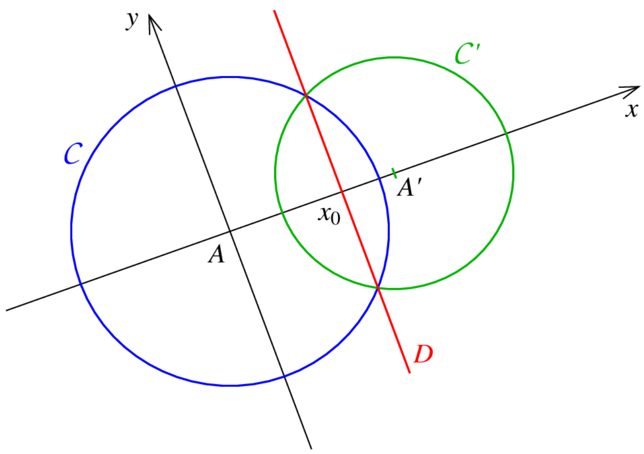
For any point M in the intersection $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$, we thus get $2dx + R'^2 - d^2 = R^2$, hence

$$x = x_0 = \frac{1}{2d}(d^2 + R^2 - R'^2).$$

This shows that the intersection $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ is contained in the intersection $\mathcal{C} \cap D$ of $\mathcal{C}$ with the line $D : x = x_0$. Conversely, one sees that if $x^2 + y^2 = R^2$ and $x = x_0$, then $(x\ ;\ y)$ also satisfies the equation

$$x^2 + y^2 - 2dx = R^2 - 2dx_0 = R^2 - (d^2 + R^2 - R'^2) = R'^2 - d^2$$

which is the equation of $\mathcal{C}'$, hence $\mathcal{C} \cap D \subset \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ and finally $\mathcal{C} \cap D = \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$.



The intersection points are thus given by $y = \pm\sqrt{R^2 - x_0^2}$. As a consequene, we have exactly two solutions that are symmetric with respect to the line (AA') as soon as $-R < x_0 < R$, or equivalently

$$\begin{aligned} -2dR < d^2 + R^2 - R'^2 < 2dR &\iff (d+R)^2 > R'^2 \ \text{ et } \ (d-R)^2 < R'^2 \\ &\iff d+R > R', \ \ d-R < R', \ \ d-R > -R', \end{aligned}$$

i.e. $|R - R'| < d < R + R'$. If one of the inequalities is an equality, we get $x_0 = \pm R$ and we thus find a single solution $y = 0$. The circles are tangent internally if $d = |R - R'|$ and tangent externally if $d = R + R'$.

Note that these results lead to a complete and rigorous proof of the isometry criteria for triangles : up to an orthonormal change of coordinates, each of the three cases entirely determines the coordinates of the triangles modulo a reflection with respect to Ox (in this argument, the origin O is chosen as one of the vertices and the axis Ox is taken to be the direction of a side of known length). The triangles specified in that way are thus isometric.

9. SCALAR PRODUCT

The *norm* $\|\overrightarrow{V}\|$ of a vector $\overrightarrow{V}$ is the length $AB = d(A, B)$ of an arbitrary bipoint that defines $\overrightarrow{V}$. From there, we put

$$(9.1) \quad \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} = \frac{1}{2}\big(\|\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}\|^2 - \|\overrightarrow{U}\|^2 - \|\overrightarrow{V}\|^2\big),$$

in particular $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{U} = \|\overrightarrow{U}\|^2$. The real number $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V}$ is called the *scalar product* of $\overrightarrow{U}$ and $\overrightarrow{V}$, and $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{U}$ is also defined to be the scalar square of $\overrightarrow{U}$, denoted $\overrightarrow{U}^2$. Consequently we obtain

$$\overrightarrow{U}^2 = \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{U} = \|\overrightarrow{U}\|^2.$$

By definition (9.1), we have

$$(9.2) \quad \|\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}\|^2 = \|\overrightarrow{U}\|^2 + \|\overrightarrow{V}\|^2 + 2\,\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V},$$

and this formula can also be rewritten

(9.2') $(\vec{U}+\vec{V})^2 = \vec{U}^2 + \vec{V}^2 + 2\,\vec{U}\cdot\vec{V}$.

This was the main motivation of the definition : that the usual identity for the square of a sum be valid for scalar products. In dimension 2 and in an orthonormal frame *Oxy,* we find $\vec{U}^2 = x^2 + y^2$; if $\vec{V}$ has components $(x' ; y')$, definition (9.1) implies

(9.3)

$$\vec{U}\cdot\vec{V} = \frac{1}{2}\big((x+x')^2 + (y+y')^2 - (x^2+y^2) - (x'^2+y'^2)\big) = xx' + yy'.$$

In dimension *n,* we would find similarly

$$\vec{U}\cdot\vec{V} = x_1x'_1 + x_2x'_2 + \ldots + x_nx'_n.$$

From there, we derive that the scalar product is "bilinear", namely that

$$\begin{aligned}
&(k\vec{U})\cdot\vec{V} = \vec{U}\cdot(k\vec{V}) = k\,\vec{U}\cdot\vec{V},\\
&(\vec{U_1}+\vec{U_2})\cdot\vec{V} = \vec{U_1}\cdot\vec{V} + \vec{U_2}\cdot\vec{V},\\
&\vec{U}\cdot(\vec{V_1}+\vec{V_1}) = \vec{U}\cdot\vec{V_1} + \vec{U}\cdot\vec{V_2}.
\end{aligned}$$

If $\vec{U}$, $\vec{V}$ are two vectors, we can pick a point *A* and write $\vec{U} = \overrightarrow{AB}$, then $\vec{V} = \overrightarrow{BC}$, so that $\vec{U} + \vec{V} = \overrightarrow{AC}$. The triangle *ABC* is rectangle if and only if we have Pythagoras' relation $AC^2 = AB^2 + BC^2$, i.e.

$$\|\vec{U}+\vec{V}\|^2 = \|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2,$$

in other words, by (9.2), if and only if $\vec{U}\cdot\vec{V} = 0$.

Consequence. *Two vectors* $\vec{U}$ *and* $\vec{V}$ *are perpendicular if and only if* $\vec{U}\cdot\vec{V} = 0$.

More generall, if we fix an origin *O* and a point *A* such that $\vec{U} = \overrightarrow{OA}$, one can also pick a coordinate system such that A belongs to the Ox axis, that is, $A = (u\,;0)$. For every vector $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{OB}\ (v\,;\,w)$ in Oxy, we then get

$$\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{V} = uv,$$

whereas

$$\|\overrightarrow{U}\| = u, \qquad \|\overrightarrow{V}\| = \sqrt{v^2+w^2}.$$

As the half-line $[O,\ B)$ intersects the trigonometric circle at point $(kv\ ;\ kw)$ with $k = 1/\sqrt{v^2+w^2}$ we get by definition

$$\cos(\overrightarrow{U},\overrightarrow{V}) = \cos(\widehat{AOB}) = kv = \frac{v}{\sqrt{v^2+w^2}}.$$

This leads to the very useful formulas

$$\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{V} = \|\overrightarrow{U}\|\ \|\overrightarrow{V}\|\ \cos(\overrightarrow{U},\overrightarrow{V}), \qquad \cos(\overrightarrow{U},\overrightarrow{V}) = \frac{\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{V}}{\|\overrightarrow{U}\|\ \|\overrightarrow{V}\|}.$$

10. MORE ADVANCED MATERIAL

At this point, we have all the necessary foundations, and the succession of concepts to be introduced becomes much more flexible - much of what we discuss below only concerns high school level and beyond.

One can for example study further properties of triangles and circles, and gradually introduce the main geometric transformations (in the plane to start with) : translations, homotheties, affinities, axial symmetries, projections, rotations with respect to a point ; and in space, symmetries with respect to a point, a line or a plane, orthogonal projections on a plane or on a line, rotation around an axis. Available tools allow making either intrinsic geometric reasonings (with angles, distances, similarity ratios, ...), or calculations in Cartesian coordinates. It is actually desirable that these techniques remain intimately connected, as this is common practice in contemporary mathematics (the period that we describe as "contemporary" actually going back to several centuries for mathematicians, engineers, physicists. ..)

It is then time to investigate the phenomenon of linearity, independently of any distance consideration. This leads to the concepts of linear combinations of vectors, linear dependence and independence, non orthonormal frames, etc, in relation with the resolution of systems of linear equations. On is quickly led to determinants 2×2, 3×3, to equations of lines, planes, etc. The general concept of vector space provides an intrinsic vision of linear algebra, and one can introduce general affine spaces, bilinear symmetric forms, Euclidean and Hermitian geometry in arbitrary dimension. What we have done before can be deepened in various ways, especially by studying the general concept of isometry.

Définition. *Let $\mathcal{E}$ and $\mathcal{F}$ be two Euclidean spaces and let $s : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ be an arbitrary map between these. We say that s is an isometry from $\mathcal{E}$ to $\mathcal{F}$ if for every pair of points* (M, N) *of $\mathcal{E}$, we have* $d(s(M), s(N)) = d(M, N)$.

Isometries are closely tied to scalar product via the following fundamental theorem.

Theorem. *If $s : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ is an isometry, then s is an affine transform, and its associated linear map $\sigma : \overrightarrow{\mathcal{E}} \to \overrightarrow{\mathcal{F}}$ is an orthogonal transform of Euclidean vector spaces, namely a linear map preserving orthogonality and scalar products* :

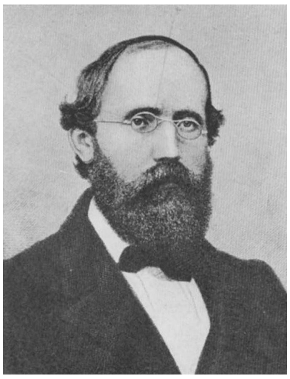
$$\sigma(\overrightarrow{V}) \cdot \sigma(\overrightarrow{W}) = \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{W}$$

for all vectors $\overrightarrow{V}, \overrightarrow{W} \in \overrightarrow{E}$.

In the same vein, one can prove the following result, which provides a rigorous mathematical justification to all definitions and physical considerations appeared in section 3.2.

Theorem. *Let* $(A_1A_2A_3A_4\ldots)$ *and* $(A'_1A'_2A'_3A'_4\ldots)$ *be two isometric figures formed by points* A_i, A'_i *of a Euclidean space* $\mathcal{E}$*. Then there exists an isometry* s *of the entire Euclidien space* $\mathcal{E}$ *such that* $A'_i = s(A_i)$.

Non Euclidean geometries.



Bernhard Riemann (1826-1866)

In contemporary mathematics, non Euclidean geometries are best seen as a special instance of Riemannian geometry, so called in reference to Bernhard Riemann, one of the founders of modern complex analysis and differential geometry [Rie]. A *Riemannian manifold* is by definition a differential manifold M, namely a topological space that admits local differentiable systems of coordinates $x = (x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_n)$, equipped with an infinitesimal metric g of the form

$$ds^2 = g(x) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(x)\, dx_i dx_j.$$

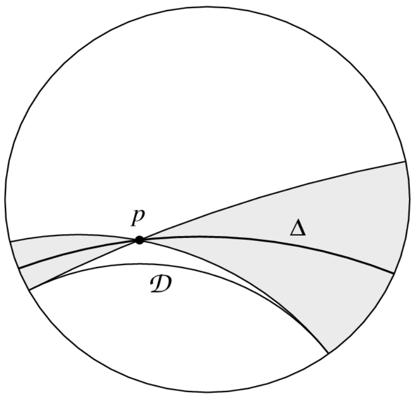
By integration the infinitesimal metric along paths, one obtains the geodesic distance which is used as a substitute of the Euclidean distance (in physics, general relativity also arises in a similar way by considering Lorentz-like metrics of the form $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2\, dt^2$). On the unit disk $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\}$ in the complex plane, denoting $z = x + iy$, one considers the so-called Poincaré metric (named after Henri Poincaré, 1854–1912, see [Poi])

$$ds = \frac{|dz|}{1-|z|^2} \quad \Leftrightarrow \quad ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{(1-(x^2+y^2))^2}.$$

The associated geodesic distance can be computed to be

$$d_P(a,b) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{|b-a|}{|1-ab|}}{1-\frac{|b-a|}{|1-ab|}}.$$

When substituting this distance to the Pythagoras / Descartes axiom, one actually obtains a non Euclidean geometry, which is a model of the hyperbolic geometry discovered by Nikolai Lobachevski (1793-1856), [Lob]. In this geometry, there are actually infinitely many parallel lines to a given line $\mathcal{D}$ through a given point p exterior to $\mathcal{D}$, so that Euclid's fifth postulate fails !



Lobachevski's hyperbolic geometry and the failure of Euclid's fifth postulate

On some ideas of Felix Hausdorff and Mikhail Gromov. We first describe a few important ideas due to Felix Hausdorff (1868 – 1942), one of the founders of modern topology [Hau]. The first one is that the Lebesgue measure of $\mathbb{R}^n$ can be generalized without any reference to the vector space structure, but just by using the metric. If $(\mathcal{E}, d)$ is an arbitrary metric space, one defines the *p-dimensional Hausdorff measure* of a subset A of $\mathcal{E}$ as

$$\mathcal{H}_p(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{H}_{p,\varepsilon}(A), \qquad \mathcal{H}_{p,\varepsilon}(A) = \inf_{\mathrm{diam}\, A_i \le \varepsilon} \sum_i (\mathrm{diam}\, A_i)^p$$

where $\mathcal{H}_{p,\varepsilon}(A)$ est least upper bound of sums $\sum_i (\mathrm{diam}\, A_i)^p$ running over all countable partitions $A = \bigcup A_i$ with $\mathrm{diam}\, A_i \le \varepsilon$. In $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$, for $p = 1$ (resp. $p = 2$, $p = 3$) one recovers the usual concepts of length, area, volume, and the definition even works when p is not an integer (it is then extremely useful to define the dimension of fractal sets). Another important idea of Hausdorff is the existence of a natural metric structure on the set of compact subsets of a given metric space ($\mathcal{E}$, d). If K, L are two compact subsets of $\mathcal{E}$, the *Hausdorff distance* of K and L is defined to be

$$d_{\mathrm{H}}(K, L) = \max\big\{ \max_{x\in K} \min_{y\in L} d(x,y), \max_{y\in L} \min_{x\in K} d(x,y) \big\}.$$

The study of metric structures has become today one of the most active domains in mathematics. We should mention here the work of Mikhail Gromov (Abel prize 2009) on length spaces and "moduli spaces" of Riemannian manifolds [Gro]. If X and Y are two compact metric spaces, one defines their *Gromov-Hausdorff distance* $d_{\mathrm{GH}}(X, Y)$ to be the infimum of all Hausdorff distances $d_{\mathrm{H}}(f(X), f(Y))$ for all possible isometric embeddings $f : X \to \mathcal{E}$, $f : Y \to \mathcal{E}$ of X and Y in another compact metric space $\mathcal{E}$. This provides a crucial tool to study deformations and degenerations of Riemannian manifolds.

BIBLIOGRAPHY:

EMIL ARTIN, *Geometric Algebra,* Interscience publishers Inc., New York, 1957, download at http://ia700300.us.archive.org/24/items/geometricalgebra033556mbp/geometricalgebra033556mbp.pdf

RENÉ DESCARTES, *La Géométrie, appendix of Discours de la méthode*, available from Project Gutenberg http://www.gutenberg.org/files/26400/26400-pdf.pdf

JEAN DIEUDONNÉ, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, 1968 - 240 pages

EUCLID, *Euclid's elements of geometry*, English translation from Greek by Richard Fitzpatrick, http://farside.ph.utexas.edu/euclid/Elements.pdf

MIKHAIL GROMOV, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, edited by J. Lafontaine and P. Pansu, Textes Mathématiques, no. 1, CEDIC, Paris, 1981 , translated by S.M. Bates, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces,* Birkhäuser, 1999.

FELIX HAUSDORFF, *Dimension und äusseres Mass*, Mathematische Annalen 79, 1-2 (1919) 157–179, and *Grundzüge der Mengenlehre,* Leipzig, 1914. viii + 476 pp, English translation *Set Theory*, American Mathematical Soc., 1957, 352 pp.

DAVID HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1899, English translation "The Foundations of Geometry " by E.J. Townsend (2005), available from project Gutenberg, http://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf

NIKOLAI LOBACHEVSKI, *Geometrical researches on the theory of parallels*, http://quod.lib.umich.edu/u/umhistmath/AAN2339.0001.001/1rgn=full+text;view=pdf

MORITZ PASCH, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1882, download https://ia700308.us.archive.org/32/items/vorlesungenbern00pascgoog/vorlesungenbern00pascgoog.pdf

HENRI POINCARÉ, *Œuvres, tome 2, 1916 - Fonctions fuchsiennes,* et *Les géométries non euclidiennes* http://www.univ-nancy2.fr/poincare/bhp/

JEAN-VICTOR PONCELET, *Traité des propriétés projectives des figures,* authier-Villar Paris, 1866, download at http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k5484980j

BERNHARD RIEMANN, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse ,* Inauguraldissertation, Göttingen, 1851, and *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Habilitationsschrift, 1854, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 13 (1868)) English translation *On the Hypotheses which lie at the Bases of Geometry*, http://www.emis.de/classics/Riemann/

RESUMEN DE TRABAJOS FIN DE MASTER

La revista Didácticas Específicas presenta en este número la segunda parte de los resúmenes de Trabajos de Fin de Máster seleccionados entre los que se presentaron en el curso 2010-11. Continuando con la labor iniciada en los números 3 y 6 se consolida ya una sección que pretende abrir una ventana hacia los jóvenes investigadores que prolongan su formación inicial en los posgrados donde imparten su docencia los profesores de nuestro departamento. En tiempos de grandes dificultades para nuestros estudiantes es un deber mostrar a los lectores una breve reseña del trabajo en el que culminan su aprovechamiento académico de los másteres en los que, con ilusión y compromiso, se está forjando una nueva generación de profesionales, intelectuales y jóvenes comprometidos con el conocimiento y la cultura científica. Si cada vez es más difícil dar el paso de inscribirse en un máster por las elevadas exigencias económicas de la matrícula y por la necesidad de prolongar un año más su formación universitaria –en detrimento de la búsqueda del primer empleo– quiénes así lo hacen deben recibir no solo nuestro esfuerzo en contribuir con lo mejor que tenemos a su formación superior, sino también nuestro apoyo e impulso. No hay futuro en la universidad, ni en la cultura, ni en la ciencia, ni en la sociedad si no se garantizan generaciones de reemplazo con la mejor formación posible. Si la clase política que gobierna este país no lo entiende así –y eso es lo que parece, desafortunadamente– las profesoras y profesores que impartimos nuestra docencia en los posgrados de este departamento estamos comprometidos con llevarles la contraria y a ayudar a crecer académicamente a nuestros estudiantes – como nuestros maestros hicieron con nosotros hace años– para que, cuando llegue su tiempo, puedan tomar el relevo de la investigación y la docencia, preferiblemente en este país, sin convertirse en una generación excelente de españoles por el mundo.

Es por ello, que queremos dar a conocer los trabajos de Fin de Máster presentados en los dos posgrados en los que el Departamento de Didácticas Específicas colabora: el *Máster de Formación de Profesorado en ESO y bachillerato* y el *Máster de Didácticas Específicas en el Aula, Museos y Espacios Naturales.* Es un orgullo, por tanto, mostrar los primeros resultados de aquellos estudiantes que han participado en ellos con la encomiable aspiración en llegar a ser profesoras y profesores de educación secundaria y quienes han pensado que su futuro profesional puede estar vinculado con la investigación en las diferentes didácticas específicas de Ciencias Sociales, Ciencias Experimentales y Matemáticas o con la didáctica del patrimonio histórico y natural.

José L. De Los Reyes Leoz.

TÍTULO: EL ROMPECABEZAS DE LOS RIESGOS NATURALES

AUTOR: Juan Luis Arceda Cuadrado

juanluweb@hotmail.com

TUTOR: Alfonso García de la Vega (Departamento de Didácticas Especificas, UAM)

NOTA CURRICULAR DEL AUTOR: Licenciado en Geografía por la Universidad Autónoma de Madrid (2010) y Máster de Formación de Profesorado en ESO y Bachillerato por la Universidad Autónoma de Madrid (2011).

RESUMEN: Este trabajo aprovecha las posibilidades que ofrece el currículo para planificar el proceso de enseñanza-aprendizaje en torno al tema de los riesgos naturales desde la asignatura *de Ciencias sociales, Geografía e Historia* del tercer curso de la ESO. Lo innovador resulta de combinar el conocimiento teórico y técnico sobre qué se conoce como riesgos naturales y cuáles son los más importantes (terremotos, tsunamis, movimientos de ladera, inundaciones, incendios forestales, subsidencia y colapso en zonas kársticas) para poder plantear medidas de prevención y mitigación de los mismos. Usando diferentes estrategias didácticas –entre ellas la denominada como "Rompecabezas" o "*Jigsaw*"- se busca potenciar la interacción positiva con el entorno, el análisis del territorio, la toma de decisiones responsables y respetuosas con el medio ambiente.

OBJETIVOS DEL TFM:

Para abordar el tema de los riesgos naturales, es preciso saber qué son. "*El riesgo natural es la posibilidad de que un territorio y la sociedad que lo habita pueda verse afectado por un fenómeno natural de rango extraordinario*". En definitiva, el riesgo está relacionado con la intervención que el hombre realiza sobre el territorio, y en muchos casos, esto se debe a que se actúa en el mismo de una manera poco adecuada, sobre todo en lo referido a actividades o asentamientos.

Todavía son recordadas las imágenes de los terremotos de Fukushima (Japón) y de Lorca (Murcia, España) que ocurrieron en 2011; pero marcó un antes y un después la catástrofe que ocurrió en 2004, cuando un tsunami formado en el océano Índico arrasó las costas de numerosos países del sudeste asiático. En los medios de comunicación se mostró el poder brutal que tienen estos eventos naturales de rango extraordinario, tanto en la población como en la sociedad por lo que cabe plantearse la siguiente cuestión: ¿es posible enseñar a los estudiantes como poder salvarse o evitar situaciones de peligro ante riesgos naturales? Es posible, ya que existe un currículo donde aparece claramente la enseñanza de riesgos naturales, tanto en la ESO como en bachillerato, pero se le da una visión de enseñanza enfocada sobre todo al ¿qué son?, y en casi ningún caso se le hace la pregunta de ¿cómo evitarlos?

METODOLOGÍA:

Para realizar la práctica de los riesgos naturales, hay que tener claros unos factores:

- Número: Es preferible escoger un número reducido de riesgos naturales.
- Epistemología: Para trabajar con adolescentes, es mejor utilizar riesgos naturales que no sean demasiado difíciles de entender.
- Cercanía: Estos riesgos naturales tienen una clara relación con los que acontecen en la Península Ibérica.
- Didáctica: Los riesgos que se han elegido tienen la facilidad de que los alumnos pueden buscar y encontrar mucha información para poder trabajar bien el tema. Es importante que se motiven y se empapen de la información que les pueda ser útil.

Tras lo analizado se plantea la siguiente pregunta: ¿cómo se puede trabajar con el tema relacionado de los riesgos naturales? Hay que analizar primero los tipos de aprendizaje, y posteriormente se analizará la técnica. Tras el análisis de los tipos de aprendizaje, se ha decidido trabajar mediante el aprendizaje cooperativo. Para esta práctica, y tras haber analizado otras técnicas, se recomendaría trabajar con una técnica denominada "*Rompecabezas*" (en inglés "*Jigsaw*"). Los pasos que deben seguirse para llevar a cabo la técnica del rompecabezas son los siguientes:

- División de la clase en grupos cooperativos heterogéneos.
- Preparación individual.
- Preparación en grupo de especialistas.
- Grupos base cooperativos.

Esta técnica potencia de sobremanera la interacción positiva y la responsabilidad, ya que todos los alumnos se necesitan entre sí, y se ven obligados a cooperar, puesto que cada uno de ellos dispone solamente de una parte del conocimiento (de una pieza del rompecabezas), mientras que sus compañeros de grupo tienen el resto.

Una vez analizados los criterios de selección de los riesgos y también tras un breve repaso a la metodología y la técnica usada, hay que ver la planificación de la simulación y cómo se va a llevar a cabo. Para ello es necesario saber:

Curso:3º de ESO.
Asignatura:Ciencias Sociales: Geografía e Historia.
Temporalización:tres clases.
Objetivos del alumno:

- Identificar los riesgos naturales.
- Cooperar dentro del grupo.
- Planificar satisfactoriamente la parte individual del trabajo para la posterior integración del grupo.
- Interrelacionar fuentes, (bibliográficas, Internet, prensa, etc.) para encontrar la información de la práctica.
- Diagnosticar problemas en el medio.
- Asimilar la importancia de conocer el medio para intervenir en el.
- Considerar a sus compañeros igualitariamente dentro del grupo.

Contenidos: Explicación de que son los Riesgos Naturales, y explicación de los seis riesgos con los que trabajar (Terremotos, Tsunamis, Movimientos de ladera, Inundaciones por lluvias intensas y torrenciales, Incendios forestales, Subsidencia y Colapso en zonas kársticas).

Desarrollo de la práctica: Sería positivo comenzar la clase preguntando si conocen algún evento reciente de desastre natural, ya pueda ser algún terremoto, tsunami, etc. Sería aconsejable hacer una *tormenta de ideas* previa para ver cuáles son los desastres naturales que conocen y que los mencionen. Tras esa actividad inicial -que puede ocupar unos 10 minutos- a los alumnos se les explicará qué son los riesgos naturales, y posteriormente se puntualizará cada riesgo natural que se va a trabajar, haciendo la pertinente explicación de cada uno de ellos. Se designarán los grupos y también se asignará que riesgo natural trabajará cada alumno, para adaptar la exigencia de trabajo con las capacidades del alumno.

Se harán grupos de seis personas. A los alumnos con mayores dificultades se les asignarán un riesgo natural que, a priori, pueda ser más fácil de trabajar, en este caso, las inundaciones. A los alumnos de mayores o de altas capacidades se les asignará un riesgo que puede ser más difícil de trabajar, en este caso, la subsidencia y el colapso en áreas kársticas. El resto de riesgos pueden ser trabajados de manera eficiente por parte del resto de los alumnos de la clase.

La práctica se llevará a cabo con un aprendizaje cooperativo y con una técnica llamada *jigsaw*. Hay que explicarles a los alumnos en qué consiste esta práctica. Ya hechos los cinco grupos con seis personas, y asignado cada riesgo natural a cada alumno, se les pide a cada alumno que traigan medidas correctoras, de prevención, de alarma, etc. que incluso pudiera ser un caso imaginario y como podrían prevenirlo (P.E. con inundaciones: "Si vamos yo y mi familia a algún pueblo de Valencia, y pronostican lluvias intensas, decirle a mi padre que aparque el coche cerca de la iglesia, que suele ser la zona más alta de los pueblos".). Esa información puede ser aconsejada por su padres, buscada en Internet, etc. A cada alumno se le pedirá que traiga al día siguiente al menos cinco ejemplos o medidas para que no se repita ninguna con sus compañeros a la hora de integrarlos a su trabajo, o para hacer una criba entre ellos y elegir el más conveniente.

Una vez organizado el grupo y cada alumno con su información, como pertenecen a un grupo de expertos, cada experto de la misma especialidad se juntará para, entre todos, extraer las cinco medidas o ejemplos más convenientes para integrarlos en su trabajo. Sería aconsejable que debatan entre ellos cuales son los más convenientes o los que menos pueden ayudarles. Una vez hecha esta reunión de expertos, se integrarán en su grupo para que cada alumno escriba las medidas que ha elegido el grupo de expertos, y entregarla al profesor.

Para evaluar la práctica, el profesor preguntará a los alumnos que le escriban una medida de prevención de cada uno de los seis riesgos trabajados dentro del grupo en un folio y se lo entreguen al profesor.

La práctica se va a desarrollar a lo largo de tres clases. Aquí se observa el reparto la práctica.

- Día 1: Durante este día, y teniendo una clase de 50 minutos, el profesor realizará la "tormenta de ideas" y explicará que son los riesgos naturales durante los primeros 35 minutos de clase. Los últimos 15 minutos de clase se dedicarán a organiza el grupo y asignar a cada alumno el riesgo natural con el que van a trabajar, aparte de explicar en qué consiste la práctica.
- Día 2: Organización de la clase en grupos en un espacio de tiempo cercano a 3 minutos. Como cada alumno tiene la información recogida, se juntará con el grupo de expertos para debatir cuales son las más convenientes. Esto se realizará durante 35 minutos. Para los últimos 15 minutos, cada alumno escribirá en un folio las cinco medidas de los seis riesgos totales. En total son treinta medidas las que deben escribir. Se designará a uno de los integrantes del grupo para que pase a ordenador las medidas que se han escrito para entregárselo al profesor al día siguiente.
- Día 3: Separación final del grupo. Se realizará una prueba de unos 20 minutos para evaluar la práctica. Tras la prueba, se realizará un debate/reflexión/coloquio de unos 35 minutos.

<u>Evaluación:</u> Se realizará una prueba final para evaluar los conocimientos adquiridos por parte de los alumnos a lo largo de la actividad. La prueba consistirá en una sola cuestión, la cual enunciará que se indicara una medida de cada riesgo natural trabajado. A parte se evaluarán otros elementos como: participación, criterio de elección de medidas, comportamiento, etc.

Las conclusiones de la práctica serán recogidas durante ese debate/reflexión/coloquio sobre los riesgos naturales. Se tiene que enfocar a entender la importancia que tiene el conocimiento sobre el medio físico y su entorno, y la intervención que hace el hombre sobre él. Hay que plantear una serie de medidas correctoras para evitar que se produzcan desastres naturales, y la pérdida de gran número de personas.

PROPUESTAS INNOVADORAS:

La aplicación de riesgos naturales en el aula es algo que no puede resultar innovador, porque está incluido en el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria

Obligatoria. La novedad no viene dada por la aparición de los riesgos naturales en el currículo, sino por la manera de trabajar los riesgos naturales con los alumnos. Hay que realizar una actividad de enseñanza-aprendizaje que ayude a los alumnos a que entiendan y conozcan los riesgos naturales para poder plantear medidas de mitigación y prevención de los mismos. Un aprendizaje extraordinario para poder programarlo sería el cooperativo, ya que es importante incentivar el trabajo activo en grupo con los alumnos del instituto, y la técnica escogida para la práctica, y como se ha nombrado con anterioridad, es la denominada "*jigsaw*".

CONCLUSIONES:

Este trabajo se ha planteado desde el punto de vista didáctico e inicialmente técnico, enfocado a alumnos con unos conocimientos muy básicos sobre el tema de los riesgos naturales. Sería necesaria en España una educación frente al riesgo, y eso tiene que empezar desde edad muy temprana.

El reto que tiene el docente ante sí es poder ir desarrollando de una manera más amplia el tema de los riesgos naturales, y que se le dé la importancia que realmente tiene. Se tienen las herramientas para ello y sólo hay que saber plantearse como utilizarlas. También hay unos objetivos que el alumno debe alcanzar, pero el más importante desde el punto de vista de este artículo es que el alumno aprenda a "analizar" el territorio. Tiene que ser crítico con lo que le rodea, ya que una persona que conoce su entorno puede elegir cuales son las decisiones más respetuosas en la relación asentamiento/territorio. Y no solo eso, ya que es fascinante pensar que algo aprendido por el alumno puede salvar vidas, y eso siempre es positivo.

Hay que impulsar una mayor implicación desde diferentes organismos para que se desarrollen cada vez más iniciativas que ayuden al alumno a trabajar con el tema de riesgos naturales y también sería un deseo por parte de un servidor que más autores trabajasen el tema de los riesgos naturales, y que se pudieran desarrollar enfoques didácticos diversos y así se podría alimentar de una manera más amplia el funcionamiento de metodologías y las técnicas usadas en las mismas, y poder comparar cuales son las más efectivas. La innovación es algo que hay que impulsar y eso ayudará a que los alumnos puedan aprender los riesgos naturales desde el punto de vista que se plantea en el artículo.

BIBLIOGRAFÍA:

- ARONSON, E., BLANEY, N., STEPHIN, C., SIKES, J., & SNAPP, M. (1978): *The jigsaw classroom*. Beverly Hills: Sage Publishing Company.
- AYALA CARCEDO, F.J. y OLCINA CANTOS, J. (2002): *Riesgos Naturales*. Barcelona: Ariel.
- BRUSÍ BELMONTE, D. (2008): "Simulando catástrofes. Recursos para la enseñanza de los riesgos naturales". En *Alambique: Didáctica de las ciencias experimentales*, 55, pp. 32-42.
- IBAÑEZ, V. E. y GÓMEZ ALEMANY, I. (2002): "El puzzle: una técnica de aprendizaje cooperativo sencilla y gratificante para profesores y alumnos". En *Alambique: Didáctica de las ciencias experimentales,* 45, pp. 27-33.
- KELLER, E. A. (2007): *Riesgos naturales Procesos de la Tierra como riesgos, desastres y catástrofes*. Madrid: Pearson Educación.
- NUHFER, E. B. (et al.), (1997): *Guía ciudadana de los Riesgos Geológicos.* Madrid: Ilustre Colegio Oficial de Geólogos de España. (Versión española de L. Suárez y M. Regueiro).
- OLCINA CANTOS, J. (2006): *¿Riesgos naturales? I. Sequías e inundaciones. II. Huracanes, sismicidad y temporales.* Mataró: Da Vinci.

TÍTULO: BLOGS Y APRENDIZAJE COOPERATIVO

AUTORA: Nieves Mora Gómez

nieves.mora.gomez@gmail.com

TUTORA: Pilar Díaz Sánchez (Departamento de Historia Contemporánea, UAM)

NOTA CURRICULAR DE LA AUTORA: Licenciada en Historia en la especialidad de Prehistoria y Arqueología en la Universidad Autónoma de Madrid (2010). Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato especialidad en Geografía e Historia en la misma universidad (2011). Durante mis estudios universitarios he ido complementando mi formación mediante la participación en varias excavaciones arqueológicas en Extremadura, Murcia y Andalucía así como colaborando en distintos gabinetes de investigación. Al mismo tiempo desarrollé mi gusto por la docencia impartiendo clases particulares. Actualmente trabajo como profesora de apoyo y refuerzo en la academia Learner´s.

RESUMEN: Desde un consenso general de la necesidad de utilizar las TIC´s en el aula, en este trabajo se pretende complementar esta metodología didáctica con el aprendizaje cooperativo en busca del fomento de la tolerancia, la asertividad, la valoración de la diversidad positivamente, la convivencia respetuosa y el trabajo en equipo. Teniendo como uno de los objetivos principales que los estudiantes comprendan la utilidad de las Ciencias Sociales en la comprensión del mundo actual se elige el trabajo de información a través de blogs como hilo conductor del aprendizaje en el aula. A diferencia del tradicional cuaderno de clase un blog permitiría a los alumnos exponer su trabajo a través de archivos de audio, de vídeos, de imágenes, gráficas, mapas etc. a modo de un cuaderno de bitácora de la asignatura. La creación de varios blogs (organizados por equipos) y la coordinación del profesor a través del suyo propio es una de las principales innovaciones presentadas en este trabajo.

OBJETIVOS DEL TFM:

En los últimos años se ha discutido mucho sobre el modelo educativo español y las posibles innovaciones para actualizarlo. Muchas de estas propuestas se han centrado sobre todo en la introducción de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC´s) en el aula. En este momento nadie duda que sea imprescindible que nuestros jóvenes aprendan a desenvolverse en el mundo digital, sin embargo, ¿de qué sirve introducir TIC´s si se sigue haciendo lo mismo? Quiero decir, en no pocas ocasiones, cuando hacen una webquest o les pedimos que publiquen sus ejercicios a un blog están realizando ejercicios más o menos tradicionales pero con un ordenador. Pues bien, aunque aprender unos fundamentos informáticos es esencial para la vida en el siglo XXI creo que también es necesario que introduzcamos innovaciones que traten otros elementos tan o más importantes que las TIC´s. Algunos de estos elementos serían la tolerancia, la asertividad, la valoración de la diversidad positivamente, elementos que fomentan la convivencia respetuosa y el trabajo en equipo.

Creo que en este sentido es muy positivo que combinemos estas dos áreas en las aulas de secundaria ya que esta etapa es decisiva para que adquieran una serie de destrezas y habilidades que les han de acompañar toda su vida. Por otro lado, creo que también es beneficioso que los alumnos se aproximen a técnicas o procedimientos de trabajo que utilizan normalmente los profesionales de las ciencias sociales. Con este acercamiento pretendemos que los estudiantes se den cuenta que la geografía no se limita a un mapa y que la historia no se encuentra sólo en los libros. Por otro lado queremos conseguir que los alumnos desarrollen una actitud crítica ante la información. No sólo la información necesaria para un trabajo académico, sino también la información que nos asalta a diario desde los medios de comunicación y sobre todo, que aprendan a tratar la información de una forma responsable.

Podríamos decir que con esta propuesta pretendemos que los alumnos aprendan lo bastante sobre las TIC´s para manejarse con desenvoltura con ellas más allá de *Facebook* o *Tuenti*, que sepan tratar la información, que se conciencien de que las ciencias sociales son algo más que una asignatura y por encima de todo que aprendan a vivir los unos con los otros pacíficamente con una actitud de respeto y de interdependencia positiva.

METODOLOGÍA:

Para lograr los objetivos arriba expuestos pensé que sería necesario utilizar una metodología de educación inclusiva de la que todos los miembros de una clase salieran beneficiados. Al final me decanté por el aprendizaje cooperativo ya que se basa en el trabajo de equipos de pocos miembros en los que se trabaja ayudándose unos a otros para obtener un objetivo común. En este tipo de metodología se combina el trabajo individual con el trabajo en equipo por lo que ayuda a fomentar la iniciativa y la interdependencia positiva aparte de otros valores como la asertividad y la tolerancia que son necesarios para vivir en sociedad. Esta metodología también es muy indicada para la atención a la diversidad ya que son los mismos alumnos los que se preocupan de que sus compañeros aprendan y alcancen el objetivo marcado por el profesor. Para trabajar las TIC´s se trabajarán con distintos recursos, tanto online como software, no obstante, el recurso que nos va a servir de hilo conductor son los blogs, uno del profesor y otros de los grupos de alumnos.

Como se ha indicado antes, para esta propuesta sería necesaria la formación de grupos. Esta propuesta se desarrollaría durante una hora a la semana y siempre se ajustará a los contenidos y actividades propias de cada unidad didáctica. Para iniciar a los alumnos a las TIC´s éstos crearían un blog de equipo en el que se publicarían sus trabajos y tendrían que participar también en el blog del profesor. Se incentivará la crítica constructiva por parte de los estudiantes, tanto de su trabajo como el de sus compañeros.

PROPUESTAS INNOVADORAS:

En un principio, se utilizará la evaluación inicial para crear los grupos de trabajo cooperativo. Es esencial que los equipos sean lo más heterogéneos y equilibrados posibles y que se limiten a tres o a cuatro miembros como máximo. Una vez formados los equipos se hacen un par de sesiones introductorias a la utilización de los blogs en las que los grupos crearán el blog de equipo y confeccionarán una pequeña entrada para ir practicando. En cuanto al sitio más idóneo donde crear un blog online, a mi juicio es *blogger* porque es muy sencillo de usar y no requiere de conocimientos avanzados de informática, además es gratuito.

Esta propuesta se puede aplicar a distintos procedimientos y actividades porque es muy sencilla y adaptable. La dinámica de esta propuesta consiste en que el profesor explica a los alumnos las tareas, contenidos y objetivos del trabajo a realizar, seguidamente, los equipos dividen el trabajo entre sus miembros de una forma equitativa. Cuando todos los miembros tienen su parte hecha hay una puesta en común y se pasa a confeccionar el trabajo conjunto. Una vez terminado se publica en el blog de equipo y por último los estudiantes deben dejar comentar los trabajos de sus compañeros de clase en los blogs de los mismos y responder a los comentarios de su propio blog. Según las actividades que vayamos a llevar a cabo será más o menos recomendable que formemos nuevos grupos, que unamos dos equipos… Sin embargo, es importante que intentemos mantener los equipos tal y como los hicimos en un principio ya que es muy probable que los equipos no funcionen bien en las primeras sesiones, puesto que lleva un tiempo aprender a trabajar de forma cooperativa y siempre será más sencillo adquirir las habilidades necesarias para esta forma de trabajar dentro de un equipo estable que dentro de un equipo cuyos miembros nunca son los mismos.

En cuanto a la utilización de los blogs, como ya se indicó antes se centrará en dos tipos de blogs, el del profesor y los de los equipos. Cada equipo tendrá un blog propio y como puede apreciarse en el párrafo de arriba la función de éste será sobre todo de cuaderno de clase. No obstante, a diferencia del tradicional cuaderno de clase un blog permitiría a los alumnos exponer su trabajo a través de archivos de audio, de vídeos, de imágenes, gráficas, mapas… podrían utilizar numerosos recursos. Otro motivo por el que utilizar blogs es que las entradas pueden ser comentadas y de hecho en esta propuesta es obligatorio que los estudiantes comenten en los blogs de sus compañeros y que respondan a los comentarios de sus blogs. También deberán enviar al profesor un informe en el que expliquen cuál ha sido el trabajo que más les ha gustado y el que menos, razonando sus respuestas. Los equipos podrán personalizar su blog y publicar entradas que tengan alguna relación con la asignatura o con el centro escolar. Para evitar malos usos del blog de equipo el profesor será un autor con derechos de administración de todos los blogs de sus alumnos. Estos derechos de administración permiten volver a editar o eliminar entradas.

El blog del profesor tendrá una función más amplia. Aparte de servir como bitácora de clase también tendrá una función informativa. La primera función se refiere a la publicación de entradas en las que se traten los contenidos de clase con distintos recursos y la segunda a la publicación de noticias que estén relacionadas con el centro educativo o la asignatura. La participación de los alumnos en este blog será mediante dos vías. Por un lado los alumnos deben comentar alguna que otra entrada y por otro serán ellos mismos los que confeccionen algunas de estas entradas. En cada unidad habrá tres equipos que deberán de hacer algún resumen, esquema, eje cronológico, mapa, etc. que se publicará en el blog del profesor a modo de material de apoyo para el estudio. Esto sirve para que los estudiantes vayan trabajando con los contenidos de clase y también le es útil al profesor para observar cómo han asimilado la unidad didáctica en cuestión. El profesor además de encargarse de su blog y de revisar los blogs de los equipos, tendrá que realizar un seguimiento del trabajo y del funcionamiento de cada equipo para observar la evolución de los mismos e intervenir como mediador en los casos que sean necesarios.

Las actividades propias de los profesionales de las ciencias sociales a las que me referí en los objetivos de esta propuesta variarán dependiendo de los contenidos de cada unidad. Un ejemplo es el análisis territorial, una tarea que hacen a diario muchos profesionales de distintas áreas y que según cómo lo enfoquemos puede ser perfecta para trabajar las unidades referentes a la geografía física, los sectores económicos o el impacto medioambiental del hombre. Otro ejemplo puede ser el del estudio de un hecho histórico más o menos reciente a través de entrevistas y de la historia oral.

Durante el desarrollo de estos proyectos siempre se instará a los alumnos y se valorará que desarrollen una actitud crítica en cuanto a la información que obtienen en sus trabajos. Esto quiere decir que deberán seleccionar la información más adecuada para lo que se les pide, comprobar su veracidad y extraer conclusiones propias. Esto último creo que es una de las capacidades más útiles para las ciencias sociales y que a la vez les serán muy beneficiosas para su vida adulta ya que habrán aprendido que los medios de comunicación no son tan objetivos como pretenden ser y que casi siempre detrás de cualquier dato o información está la intención de quien lo da a conocer.

La evaluación es continua y conjunta, es decir, la nota final de esta parte de la asignatura se obtiene de las medias de todas las actividades realizadas y es conjunta porque todos los miembros de un mismo equipo reciben la misma puntuación. También se tendrán en cuenta para la evaluación global las autoevaluaciones de los estudiantes. Serán ellos mismos los que evalúen su propio trabajo y actitud así como las de sus compañeros de equipo. Con la autoevaluación se incita a los alumnos a reflexionar y a encontrar soluciones a los posibles problemas que puedan surgir del trabajo en equipo.

CONCLUSIONES:

A la hora de poner en práctica una propuesta como ésta se presentan varias complicaciones. La primera de ella es de carácter técnico ya que no todos los centros disponen de un aula de informática lo suficientemente bien equipada como para llevar a cabo de manera satisfactoria esta propuesta. Otra complicación es que los mismos alumnos no están acostumbrados a trabajar de esta manera. Puede que la utilización de un blog sea un elemento motivador, estimulante pero la mayoría de los estudiantes están acostumbrados a que cuando se trabaja en grupo cada miembro hace y firma su parte, se junta todo sin unificarlo y que el profesor le ponga a cada uno la nota que merece. Lleva bastante tiempo conseguir que empiecen a trabajar de forma cooperativa, pero el mayor obstáculo que nos podemos encontrar al introducir cualquier innovación educativa somos nosotros mismos. Al igual que a nuestros alumnos nos cuesta adaptarnos a metodologías nuevas y tenemos que invertir tiempo e incluso a veces dinero para formarnos en innovaciones docentes o TIC´s. En este aspecto debemos de hacer un esfuerzo para llevar a cabo propuestas de esta índole. Es más, creo que como profesores es nuestro deber buscar siempre nuevas formas de trabajo, nuevas metodologías, nuevos recursos, nuevos discursos y contenidos para lograr adaptar la educación a cada circunstancia.

En definitiva, tenemos que educar a nuestros alumnos para que estén preparados para un futuro siempre cambiante e incierto, pero en el que si hemos hecho bien nuestro trabajo se desenvolverán sin ningún problema.

BIBLIOGRAFÍA:

- HERNÁNDEZ CARDONA, F. (2002): *Didáctica de las ciencias sociales, geografía e historia.* Barcelona: Graò.
- MONEREO, C.; BADIA, A.; DOMÉNECH, M.; EESCOFET, A.; FUENTES, M.; RODRIGUEZ ILLERA, J.L.; TIRADO, F. J.; VAYREDA, A. (2005): Internet *y competencias básicas. Aprender a colaborar, a comunicarse, a participar, a aprender.* Barcelona: Graò.
- PARRILLA LATAS, A. (1992): *El profesor ante la integración escolar: "investigación y formación".* Madrid: Cincel.

- PUJOLÁS, P. (2001): *Atención a la diversidad y aprendizaje cooperativo en la educación obligatoria.* Archidona (Málaga): Aljibe.
- PUJOLÁS, P. (2004): *Aprender juntos alumnos diferentes, los equipos de aprendizaje cooperativo en el aula.* Barcelona: EUMO.
- SÁNCHEZ LÓPEZ, D. (2009): "Implantación de dos blogs en Geografía e Historia. De "ccss2esonline" a "senderosdhistoria".En *Clío,* 35.Disponible en: http://clio.rediris.es/n35/blogs.pdf
- SERRANO GONZÁLEZ-TEJERO, J.M.; GONZÁLEZ-HERRERO LÓPEZ, M. E. (1996): *Cooperar para aprender ¿Cómo implementar el aprendizaje cooperativo en el aula?* Murcia: DM
- SOBRINO, D. (2011): "El blog en el aula de historia, experiencias didácticas." En *Iber, Didáctica de las ciencias sociales, geografía e historia,* 68, pp. 92- 99.

TÍTULO: EL PATRIMONIO INMATERIAL EN ESO Y BACHILLERATO. UN EJEMPLO CONCRETO: EL MISTERIO DE ELCHE.

AUTOR: Manuel Elías Velasco Prieto

eliascorreo@hotmail.com

TUTORA: Carmen Blanco Jiménez (Departamento de Didácticas Específicas, UAM)

NOTA CURRICULAR DEL AUTOR: Licenciado en Historia por la Universidad Autónoma de Madrid, en la especialidad de Prehistoria e Historia Antigua. Máster Oficial en Gestión de Patrimonio Histórico Artístico por la Universidad de Cantabria, trabajo final: *Gestión arqueológica y patrimonial*. Máster en Formación de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato en la Universidad Autónoma de Madrid. Colaborador en numerosas excavaciones y gabinetes arqueológicos (*Cova Gran de Santa Linya, La Encantada, Camino de las Yeseras, Uclés*)

RESUMEN:
El patrimonio inmaterial ha sido escasamente empleado en la educación formal, debido, tal vez, a la dificultad que entraña manejar fundamentos de calado abstracto como ideas, costumbres, maneras de ser y de hacer, como son los elementos insustanciales que conforman su naturaleza. En este trabajo se propone incidir desde la educación en la salvaguarda de este patrimonio, garantía de sostenibilidad de la diversidad cultural, especialmente donde los valores inmateriales parecen diluirse en la colectividad que proyecta el modelo económico de la mundialización. Desde los currículos de Ciencias Sociales de Educación Secundaria y Bachillerato tomando como referencia el Misterio de Elche – uno de los diez bienes intangibles registrados por la UNESCO en España- se propone la inserción de este bien patrimonial dentro de una estrategia interdisciplinar a través de la Plataforma educativa: Misterio de Elche, una página de Facebook creada como recurso didáctico para estudiantes de ESO y Bachillerato.

OBJETIVOS DEL TFM:

El Patrimonio Cultural se encuentra en un proceso de reformulación constante de su concepción que repercute directamente en su percepción. Los cambios sociales y culturales, tan vertiginosos en los tiempos que vivimos, afectan continua y directamente al concepto de patrimonio, reformulándolo e incorporando una variedad de elementos presentes en la vida cotidiana que han sido "patrimonializados": patrimonio arquitectónico y urbano, paisaje urbano, producción material, patrimonio inmaterial…

A partir de los años 80 se introduce un nuevo concepto de patrimonio que transforma la visión decimonónica anterior, fundamentada en la monumentalidad, antigüedad y calidad artística, entendidas bajo unos ideales estéticos pertenecientes a la "cultura occidental". Desde este momento se incorpora una dimensión humana al concepto; las personas pasan a ser las propietarias, las que cuidan, conservan, respetan, valoran, disfrutan y transmiten el patrimonio.

El patrimonio sólo es comprensible como una interacción entre el bien material y el ser humano. La posibilidad de que un individuo sea capaz de atribuir valores a un bien, depende directamente de su formación, y la base de ésta se sitúa en la enseñanza tanto formal como no formal. Una ciudadanía con conciencia activa e informada de su herencia artística, se presenta como el principal baluarte para la conservación, puesta en valor y disfrute de los bienes tangibles e intangibles.

Cada vez es más frecuente encontrar contenidos patrimoniales incluidos en todos los niveles formativos, ofreciendo la posibilidad de trabajar con un gran potencial y numerosos contenidos didácticos. Sin embargo, dentro de las distintas tipologías patrimoniales, el patrimonio inmaterial ha sido nula o escasamente empleado en la actividad pedagógica. La dificultad que entraña manejar fundamentos de calado abstracto como ideas, costumbres, maneras de ser y de hacer, como son los elementos insustanciales que conforman su naturaleza, puede estar detrás de este limitado tratamiento.

En los bienes intangibles confluyen los aspectos económicos, sociales, políticos, estéticos, rituales…, que han ido desarrollándose con el paso del tiempo, emergidos de costumbres y tradiciones configuradas a lo largo de un proceso que arranca en un espacio y momento determinados. Todos ellos emiten testimonios y valores reconocibles de las diferentes comunidades que lo conforman, construyendo un mensaje que debemos recoger y trabajar en la educación. La educación debe ahondar en la salvaguarda de este patrimonio, garantía de sostenibilidad de la diversidad cultural, y con mayor energía debido al mundo global en el que vivimos, donde los valores inmateriales parecen diluirse en la colectividad que proyecta el modelo económico de la mundialización.

Existen al menos tres niveles de entendimiento en relación con el patrimonio inmaterial. El primero de ellos es la lista de bienes patrimoniales inmateriales que cada año publica la UNESCO. El segundo es la legislación que cada país posee en relación con el patrimonio. En el caso de España la Ley 16/1985 del Patrimonio Histórico Español. El tercero es la concepción y significado de los bienes patrimoniales intangibles que el pueblo crea y reconoce como particulares.

Para nuestro trabajo delimitamos la materia de estudio, concentrándonos en la integración del patrimonio inmaterial reconocido por la UNESCO dentro de los currículos de Ciencias Sociales de Educación Secundaria y Bachillerato. Seleccione el Misterio de Elche – uno de los diez bienes intangibles registrados por la UNESCO en España- como un ejemplo concreto, debido a los valores geográficos, históricos y patrimoniales que conforman su naturaleza.

METODOLOGÍA:

El estudio del patrimonio inmaterial trabaja con una serie de valores que traspasan la frontera del conocimiento, adentrándose en un universo cargado de costumbres y tradiciones arraigadas a una identidad que va más allá de lo empírico.

Las decisiones que como docentes debemos tomar en relación con contenidos, procedimientos, actitudes, actividades y evaluación, están subordinadas a las creencias o representaciones de un modelo epistemológico particular que orbita alrededor de la naturaleza del objeto de estudio y su desarrollo.

Al enfrentarnos al reto de acondicionar la enseñanza del patrimonio inmaterial a los criterios de enseñanza vigentes, optamos por emplear una metodología activa y participativa, realizando una serie de elecciones pedagógicas que influyen directamente en la experiencia y percepción de los alumnos.

Asentados en estos principios, la educación patrimonial se concibe de forma abierta y en continua conexión con una realidad social, permitiendo a los alumnos conocer los mecanismos para interpretar tanto su entorno más inmediato, como el ámbito de acción significativo que les rodea. De esta manera, el Misterio de Elche, y por extensión el patrimonio inmaterial en su conjunto, se encuentran ligados a una comunidad reconocida dentro de su singularidad. En la práctica docente recoger y extender estas características nos permite trabajar contenidos, procedimientos, actitudes, vinculados directamente con la naturaleza del objeto de estudio.

El agente más importante de todo el sistema educativo es el alumno. Basándonos en este principio es necesario establecer nuestro punto de partida en sus motivaciones, provocando problemas que despierten en él la necesidad de encontrar respuestas. En el caso del Misterio de Elche, muchos de los elementos relacionados con la “fiesta” se vinculan directamente con la educación y son de especial interés entre los adolescentes.

El análisis de los conocimientos previos del alumno es el principio de nuestra metodología. Para nosotros es imprescindible conocer qué preconceptos e ideas válidas posee el estudiante en relación con nuestro objeto de estudio, y establecer, posteriormente, la canalización adecuada para confeccionar un juicio crítico y conocimiento individual. La realización de una encuesta previa que nos permita conocer los conocimientos de los alumnos, nos proporcionará la posibilidad de fijar la magnitud de los contenidos y comprobar, finalmente, si la metodología de trabajo empleada ha obtenido resultados.

La enseñanza del patrimonio inmaterial se articulará en torno a objetivos y contenidos (conceptuales, procedimentales y actitudinales) que facilitarán la adquisición de las diferentes capacidades que promulga el currículo. Los contenidos procedimentales y actitudinales nos proporcionarán las herramientas de interpretación y valorización imprescindibles para transmitir la necesidad de conservar unos bienes que nos pertenecen.

Por último, la inserción en la enseñanza del estudio de los bienes patrimoniales inmateriales no se concibe sino es apoyada y sustentada en una metodología interdisciplinar. En el patrimonio intangible existe una continua interacción entre ciencias-disciplinas (historia, demografía, sociología, economía, arte, lengua y literatura, música) imprescindibles y esenciales para su completa comprensión.

PROPUESTAS INNOVADORAS:

La inserción en la enseñanza del estudio de los bienes patrimoniales inmateriales ya es, per se, una propuesta innovadora debido a su exiguo tratamiento en las aulas. Como hemos visto, su naturaleza se ensambla perfectamente dentro del currículo de Ciencias Sociales, Geografía e Historia, cumpliendo una serie de objetivos y contenidos indispensables para su implantación.

Sin embargo, las posibilidades que nos ofrece la enseñanza del patrimonio inmaterial, un objeto de estudio dinámico y en constante desarrollo, permiten concebir una serie de proyectos relacionados específicamente con su esencia en relación con la educación.

Cuando nos enfrentamos ante el estudio del patrimonio inmaterial nos encontramos un entramado social en constante transformación. Algo similar nos ocurre en las aulas. El sistema educativo actual tiene por delante el reto de caminar en la dirección que establece la realidad social, de construir un vínculo de unión con la sociedad que permita acercar la enseñanza a los mecanismos utilizados por los alumnos en su quehacer diario. Dejar de lado estos espacios en los que el estudiante se desenvuelve sería obviar la oportunidad de conectar la educación con sus intereses.

Con el objetivo de aunar esas dos realidades sociales que confluyen en un mismo punto, el presente proyecto educativo realiza una propuesta en relacióna las nuevas tecnologías, más concretamente Internet y las redes sociales, vinculando el Misterio de Elche, y el patrimonio inmaterial, con el estudiante. Internet se ha convertido en el instrumento más utilizado por los alumnos. Como docentes tenemos la obligación de adaptarnos y acondicionar nuestros materiales a este engranaje virtual, dotando al alumno de las herramientas y filtros necesarios para manejar e interpretar la ingente información que las nuevas tecnologías generan.

Con esta finalidad nace Plataforma educativa: Misterio de Elche, una página de Facebook creada como recurso didáctico para estudiantes de ESO y Bachillerato. A través de ella se pretende establecer una relación entre los alumnos, en este caso de los institutos ilicitanos, que conviven desde pequeños con todo lo que representa la celebración del Misterio de Elche, y los estudiantes de las diferentes Comunidades Autónomas españolas, creando un espacio virtual donde comunicarse, interactuar e introducir materiales. Se trata de un ejemplo concreto dentro de un mecanismo que englobaría al patrimonio inmaterial en su conjunto, creando un espacio multidireccional donde poder compartir contenidos, experiencias, sentimientos, sensibilidades y pasiones en relación con los bienes patrimoniales inmateriales.

La Plataforma educativa es una web creada por estudiantes y para estudiantes, pero que debe ser visitada con asiduidad y administrada por docentes. Por un lado, con el cometido de establecer los filtros necesarios para que la información que se maneje en la página sea idónea, útil y fiable. Por otro, es una herramienta indispensable para los docentes, porque pueden acceder a los conocimientos que manejan los alumnos, sus gustos e intereses en relación con el objeto de estudio, su forma de interpretar el bien inmaterial, la utilización de nuevos recursos, las relaciones interculturales, el manejo de vocabulario y las diferentes concepciones que se poseen sobre el bien patrimonial.

Más allá del manejo de contenidos y competencias, detrás de esta propuesta se encuentra la posibilidad de fomentar la educación en valores. Unos valores que se desprenden del contacto intercultural entre estudiantes y de la relación del bien patrimonial con el alumno consiguiendo que se fomente el respeto, la conservación y puesta en valor del patrimonio.

CONCLUSIONES:

El objetivo final del presente trabajo es reivindicar la importancia del patrimonio cultural en su conjunto, más allá de su naturaleza tangible o intangible. Sin embargo es cierto que en diferentes ámbitos culturales, y entre ellos el educativo, existe una ausencia total de contenidos relacionados con el patrimonio inmaterial, por lo que era necesario afrontar un estudio de tal magnitud para manifestar su importancia.

Hemos pretendido mostrar el patrimonio inmaterial como contenido que aporta a la educación una serie de conceptos, procedimientos y actitudes que vinculan al alumno con una realidad social. A través de los bienes patrimoniales intangibles podemos conocer la historia, las tradiciones, los modos de producción y la naturaleza de diferentes comunidades, todo un conglomerado que nos posibilita trabajar con contenidos, competencias, objetivos y finalidades de la Educación Secundaria y el Bachillerato.

Quizás, una de las razones por la cual existe una ausencia en el estudio del patrimonio inmaterial dentro de los ámbitos educativos, sea debido a la reciente creación del concepto, el cual no llega a recoger ni la propia Ley estatal dedicada al Patrimonio Histórico Español. No obstante, cada vez son más frecuentes las noticias dedicadas al patrimonio que recogen este tipo de herencia y recalan en la sociedad sin que el receptor posea ningún tipo de filtro interpretativo. Esta situación hace necesario una reflexión sobre el manejo de ciertos bienes patrimoniales dentro de los parámetros marcados por la enseñanza formal.

A través de la educación patrimonial se persigue dotar a los alumnos de una mirada crítica, basada en el conocimiento, que permita, desde su formación, tomar partido libremente de los bienes que merecen ser conservados.

Concluyo afirmando que el patrimonio debe poseer un papel decisivo y fundamental dentro de la educación. El trabajo con las nuevas generaciones es sin duda un compromiso que necesita asumirse de forma responsable y entusiasta, integrando a los jóvenes de hoy en las tareas de concienciación y conservación de su patrimonio.

BIBLIOGRAFÍA:

- ALONSO PONGA, J. (2009): “La construcción mental del patrimonio inmaterial.” *Patrimonio Cultural de España*, 0, pp. 43-61
- AGUIRRE, I. (2008): “Nuevas ideas de arte y cultura para nuevas perspectivas en la difusión del patrimonio”. En AGUIRRE, I. (Et al.). *El acceso al patrimonio cultural. Retos y debates*, Pamplona: Cátedra Jorge Oteiza y Universidad Pública de Navarra, pp.67-118.
- ÁLVAREZ ACERO, T. (2007): *“Las construcciones tradicionales testigos históricos del patrimonio intangible. Perspectiva didáctica y su inserción en el currículo escolar”.* En *V Encuentro Internacional Ciudad, Imagen y Memoria.* Santiago de Cuba.
- CALAF, R. (2009): *Didáctica del Patrimonio: epistemología, metodología y estudios de casos.* Gijón: Trea.
- DE CABO, E. (2009): “Reconocimiento del Patrimonio Inmaterial: La Convención para la Salvaguarda del Patrimonio Cultural Inmaterial". *Patrimonio Cultural de España,* 0, pp. 145-157.
- FONTAL MERILLAS, O. (2003): *La educación patrimonial. Teoría y práctica en el aula, el museo e Internet.* Gijón: Trea.
- MUNJERI, D. (2008): “Patrimonio Material e Inmaterial: de la Diferencia”. *Museum Internacional*, 221-222.
- MUÑOZ COSME, A. (2011): Educación y Patrimonio. *Patrimonio cultural de España*, 5, pp. 9-15.
- QUINTERO MORÓN, V. (2005): “El patrimonio intangible como instrumento para la diversidad cultural ¿una alternativa posible?”, *PH Cuadernos*, 17, pp. 69-83.
- RUIZ BERRIO, J. (2010): *El patrimonio histórico-educativo. Su conversión y estudio*. Madrid: Biblioteca Nueva.

TÍTULO: EL CINE COMO HERRAMIENTA EDUCATIVA EN LA DIDÁCTICA DE LA HISTORIA DEL ARTE DE 2º DE BACHILLERATO

AUTOR: Andrés Martín Chamorro
andres_martin_84@hotmail.com

TUTORA: Lourdes Roldán Gómez (Departamento de Historia y Teoría del Arte, UAM)

NOTA CURRICULAR DEL AUTOR: Licenciado en Historia del Arte por la Universidad de Salamanca (2007). Máster en Tasador de Antigüedades y Obras de Arte por la Universidad de Alcalá de Henares (2009). Periodo de prácticas en Museo ABC. Máster en Formación de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato en la Universidad Autónoma de Madrid, Especialidad Geografía e Historia (2011). Autor del artículo "Nuestra Señora del Espino: un Santuario entre montañas" en *Revista de Arqueología del Siglo XXI*, nº 366, pp. 26-35.

RESUMEN: En esta propuesta didáctica se pretende fomentar la lectura crítica de la imagen entre los estudiantes, incorporando los contenidos fundamentales del currículo de la asignatura Historia del Arte de 2º de Bachillerato, teniendo en cuenta que cada proyección debe estar preparada con el máximo detalle si se tiene el objetivo de aprender contenidos artísticos y capacitar a los estudiantes en la lectura del lenguaje fílmico. La figura del profesor es el eje fundamental de esta propuesta. El cine aporta contenidos y datos, pero lo hace de forma ficticia, creativa, persuasiva y seductora que han de ser pulidos y guiados por el docente como guía y mediador entre el film y los alumnos. Se recomienda la elaboración de fichas, una para cada película que permita su análisis desde el punto de vista de la disciplina estudiada; del mismo modo se presenta un listado de films que pueden ser objeto de estudio y trabajo en el aula.

OBJETIVOS DEL TFM:

Los objetivos prioritarios que se plantean en este trabajo son muy diversos. En primer lugar, aprender a ver cine incidiendo en aspectos técnicos como la fotografía, el guión, los personajes, la acción..., etc. y su relación con el tema de estudio, desenmascarando licencias creativas, invenciones y anacronismos. Por otro lado, se intentará fomentar la lectura crítica de la imagen para evitar ser manipulado por el medio y además poder aprender de él. Al mismo tiempo, se pretende que el alumno disfrute estéticamente del cine apoyándonos en su alto componente motivacional. Por último, a través de la relación del currículum de la Historia del Arte de 2º de Bachillerato con determinadas películas o escenas concretas de las mismas, se intenta crear un referente visual, que puede convertirse incluso en contenido, de los aprendizajes que queremos impartir; se pretende configurar una idea, lo más provechosa posible, de la realidad estudiada y utilizar el documento cinematográfico como punto de partida para el aprendizaje y la investigación.

METODOLOGÍA:

Para conseguir el efecto formativo deseado sería conveniente que tanto la proyección de las películas como las actividades posteriores que han de acompañarlas fueran programadas en el currículo del área correspondiente con el fin de evitar improvisaciones que impidieran obtener el máximo provecho del material audiovisual.

La figura del profesor es el eje fundamental de esta propuesta. El cine aporta contenidos y datos, pero lo hace de forma ficticia, creativa, persuasiva y seductora por lo que hay que interpretar su lenguaje; lo consideraremos como un material en bruto que ha de ser pulido y es en este punto donde la figura del docente tiene su papel más relevante, como guía y mediador entre el film, la propia disciplina y los alumnos. Éste debe centrar la atención en los aspectos más importantes y mejor adaptados además de extraer la información necesaria para el correcto desarrollo de las sesiones. Cada profesor, por tanto, debe orientar las sesiones de trabajo y organizar las actividades de motivación, preparación y aplicación a desarrollar en el curso.

Como material didáctico de apoyo para el trabajo con el cine en el aula, se recomienda la elaboración de una serie de fichas, una para cada película que permita su análisis desde el punto de vista de la disciplina estudiada, en este caso, la Historia del Arte de 2º de Bachillerato. En el siguiente apartado se presenta un listado de dichas películas y se explica el modelo general de ficha para su aprovechamiento didáctico.

PROPUESTAS INNOVADORAS:

Al comenzar la selección de las películas más adecuadas para nuestro cometido no es necesario centrarse en documentales o cine didáctico. Se opina que tiene más interés acercar a los alumnos al cine más accesible para ellos: las películas comerciales. Obsérvese la lista que se adjunta para darse cuenta de que con un buen ciclo de 5 ó 6 películas-clave puede cubrirse una gran parte del programa. Son numerosos los filmes que giran en torno a la trayectoria vital de los artistas, de entre todos ellos, los ejemplos seleccionados pertenecen en su mayoría al subgénero del *biopic*, término que procede de la contracción de *biographicalpicture*. Generalmente se trata de películas argumentales que se exhibieron en salas comerciales. Algunas de éstas se basan en la adaptación de una obra literaria previa, y es muy común que este tipo de producciones enfaticen más la vida que la obra del protagonista destacando los aspectos más conocidos o más controvertidos de su existencia y, a veces, también otros que nunca sucedieron.

Un aspecto para el que resulta muy útil el apoyo del cine es el de las técnicas artísticas. En cada película seleccionada podemos encontrar pequeñas pinceladas -nunca mejor dicho- que ayudan a entender los procesos creativos, a veces muy complejos; esta información puede ser ampliada a través de otros recursos como manuales, páginas web...etc. Algo similar ocurre con el contexto en el que se mueven los artistas en las diferentes épocas que abarcamos, ya que las películas son capaces de recrear los convencionalismos que éstas llevan implícitos, y que condicionan la existencia de dichos autores, tanto por sometimiento como por reacción.

Tras la oportuna explicación introductoria de cada película, que fije la atención del alumno en determinados aspectos de la misma, y el visionado de la cinta por parte de los estudiantes, será el momento de analizar en clase la obra partiendo del material didáctico preparado a tal efecto. La actitud pasiva ante la pantalla puede y debe dinamizarse mediante la lectura, así como la lectura puede enriquecerse con imágenes, de ahí que en las actividades se propongan pequeñas investigaciones y lecturas que completen los conocimientos que acaban de adquirir.

Las películas sugeridas en la siguiente lista han de tomarse como documento de información a partir del cual introducir los contenidos correspondientes.

<table>
<tr><th colspan="3">CONTENIDOS Y PELÍCULAS</th></tr>
<tr><th colspan="2">CURRÍCULUM</th><th rowspan="2">PELÍCULAS RECOMENDADAS</th></tr>
<tr><th>BLOQUES</th><th>SUBAPARTADOS</th></tr>
<tr><td>11.
El arte italiano del Cinquecento.</td><td>- La escultura: De Miguel Ángel a Gianbologna.</td><td>- El tormento y el éxtasis (Carol Reed, 1965)</td></tr>
<tr><td>12.
El Renacimiento en España.</td><td>- Pintura. El Greco.</td><td>-El Greco (Luciano Salce, 1966)
-El Greco (IannisSmaragdis, 2007)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">14.
La pintura barroca en Europa.</td><td>- La pintura italiana. Caravaggio y el naturalismo. Clasicismo y Barroco decorativo.</td><td>- Caravaggio, el pintor maldito (Gofredo Alessandrini, 1941)
- Caravaggio (Derek Jarman, 1986)</td></tr>
<tr><td>-La pintura flamenca y holandesa. Rubens y Rembrandt.</td><td>- La kermesse heroica (Jacques Feyder, 1935)
- Rembrandt (Alexander Korda, 1936)
- Rembrandt fecit 1669 (JosStelling, 1977)
- La Ronda de Noche (Peter Greenaway, 2008)
- La joven de la perla (Peter Webber, 2003)</td></tr>
<tr><td>16.
El siglo XIX: El arte de un mundo en transformación.</td><td>-La figura de Goya.</td><td>- La maja desnuda (Henry Koster, 1958)
- Crónica de un amor y una soledad de Goya (Goya, Historia de una soledad) (Nino Quevedo, 1970)
- Goya. 1746-1828 (José Ramón Larraz, 1985)
- Volaverunt (Vigas Luna, 1999)
- Goya en Burdeos (Carlos Saura, 1999)
- LosFantasmas de Goya (Milos Forman, 2006)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">17.
La revolución industrial y el</td><td>-El modernismo. Gaudí.</td><td>- Klimt(Raoul Ruiz, 2006)</td></tr>
<tr><td>- La pintura impresionista. El neoimpresionismo.</td><td>- El loco del pelo rojo (VincenteMinnelli, 1956)
- Vincent y Theo (Robert Altman, 1990)
- Los sueños de AkiraKurosawa (AkiraKurosawa, 1990)
- Van Gogh (Maurice Pialat, 1991)</td></tr>
</table>

impacto de los nuevos materiales en la arquitectura.	-Los pintores postimpresionistas como fundamento de las vanguardias.	- *Gauguin el Salvaje* (Fielder Cook, 1980) - *Bonjour Monsieur Gauguin* (Jean-Claude Labrecque, 1988) - *Moulin Rouge* (John Huston, 1952) - *Toulousse-Lautrec* (Roger Planchon, 1997)
	-La escultura. Rodin.	- *La Pasión de Camille Claudel* (Bruno Nuytten, 1988)
19. **La ruptura de la tradición: El arte en la primera mitad del siglo XX.**	- Dadá y Surrealismo. Miró y Dalí.	- *Dalí* (Antonio Ribas, 1991)
	- Picasso.	- *El Misterio Picasso* (Henri-George Clouzot, 1955) - *Sobrevivir a Picasso* (James Ivory, 1996)
21. **Las artes plásticas en la segunda mitad del siglo XX: Entre la abstracción y el nuevo realismo.**	- El Expresionismo abstracto y el Informalismo.	- *Pollock, la vida de un creador* (Ed Harris, 2000)
	- La nueva figuración. El Pop art. El Hiperrealismo.	- *Yo disparé a Andy Warhol* (Mary Harron, 1996) - *El sol del membrillo* (Víctor Erice, 1992)
22. **El arte de nuestro tiempo: Universalización del arte.**	-Nuevos sistemas visuales: Fotografía, cine, cartelismo, cómic, combinación de lenguajes expresivos. El impacto de las nuevas tecnologías en la difusión y la creación artística.	- *Basquiat* (JulianSchnabel, 1996) - *El amor es el demonio* (John Maybury, 1998)

OTROS FILMES DE INTERÉS DIDÁCTICO	
TEMA	**PELÍCULAS RECOMENDADAS**
Artemisia Gentilleschi (1593-1654)	- *Artemisia* (AgnesMerlet, 1997)
KitagawaUtamaro (h. 1753 - 1806)	- *Utamaro y sus cinco mujeres* (KenjiMizoguchi, 1946)
Joaquín Sorolla (1863-1923)	- *Cartas a Sorolla* (José Antonio Escrivá, 2006)
Amadeo Modigliani (1884-1920)	- *Los amantes de Montparnasse* (Jacques Becker, 1957) - *Modigliani*(Mick Davis, 2006)
Frida Kahlo (1907-1954)	- *Frida, naturaleza viva* (Paul Leduc, 1984) - *Frida* (JulieTaymor, 2002)

A la hora de extraer información sobre el tipo de películas que nos conciernen, una referencia fundamental sería el texto de Gloria Camarero *Pintores en el Cine* (2009). Los datos que nos ofrece también pueden ser enriquecidos en gran manera con la aportación de los diferentes blogs didácticos y recursos que se pueden encontrar en Internet.

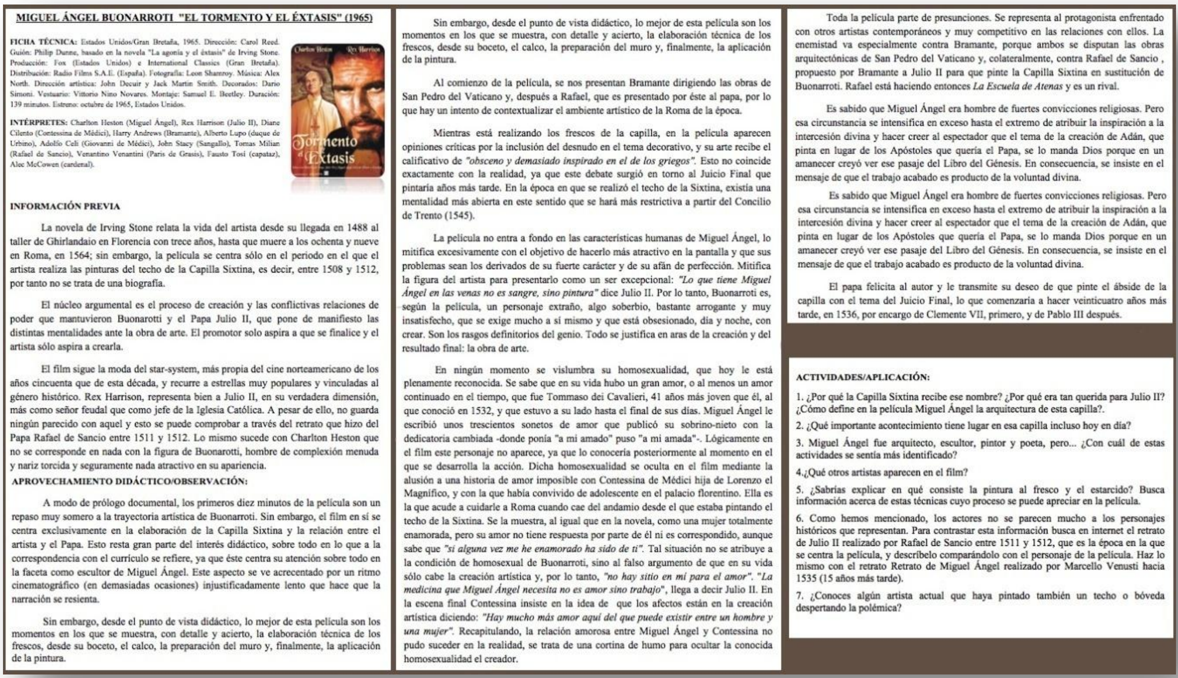
- La estructura que se propone para las fichas de trabajo constaría de:

1. Una breve ficha técnica.
2. Un apartado de información previa que ponga en antecedentes a los alumnos sobre la película.
3. Una sección que se ha denominado *"aprovechamiento didáctico"* en la que se responda a la pregunta: ¿Qué tipo de conocimientos se pueden extraer/adquirir de este film?
4. Una enumeración de temas transversales que pueden ser tratados también a través del documento, ya que el cine, al representar la realidad, da pie a todo tipo de planteamientos interdisciplinares.
5. Por último, se contemplan una serie de actividades de evaluación a través de las cuales el alumno debe demostrar lo que ha aprendido del film y cómo puede aplicar esos conocimientos en su vida diaria.

En cuanto a las fases de trabajo, a grandes rasgos seguimos las indicaciones de Martínez-Salanova (2002), Ruiz Rubio (1994) y, sobre todo, de Saturnino de la Torre (1996). Este último autor propuso el método ORA, en sus palabras: *un procedimiento para utilizar con provecho cualquier estímulo... una herramienta intelectual para apropiarnos del medio y convertirlo en alimento de formación.* Este método se basa en tres conceptos: Observación, Reflexión y Aplicación (ORA), que quedarían reflejados en el modelo de ficha que aquí se propone.

En cuanto a la utilización de las fichas, caben muchas posibilidades y debe ser el profesor quien elija la que mejor se adecue a su contexto y forma de trabajo. Éste puede decidir si explicita el *aprovechamiento didáctico* antes o después de la visualización del film, o incluso, puede abstenerse de ofrecer esta información emprendiendo medidas para que los alumnos la extraigan de forma autónoma. Por otro lado, los temas transversales que se sugieren pueden plantearse como debate o simplemente como una llamada de atención a fin de enfocar el visionado del film. Las actividades también son susceptibles de enumerarse antes del visionado, para que los alumnos se vayan fijando en los detalles a fin de obtener la información que se les pide, pero también se pueden dejar para el final permitiendo el disfrute de la película sin distracciones. En este último caso, el profesor debería ser un apoyo recordando las escenas, ya que se solicita información bastante precisa que se puede haber pasado por alto sin la advertencia previa.

Para ejemplificar lo que se ha dicho anteriormente, se muestra aquí un modelo de ficha para trabajar la trayectoria de Miguel Ángel Buonarroti a través de la película *El Tormento y el Éxtasis* (Carol Reed, 1965):



MIGUEL ÁNGEL BUONARROTI "EL TORMENTO Y EL ÉXTASIS" (1965)

FICHA TÉCNICA: Estados Unidos/Gran Bretaña, 1965. Dirección: Carol Reed. Guión: Philip Dunne, basado en la novela "La agonía y el éxtasis" de Irving Stone. Producción: Fox (Estados Unidos) e International Classics (Gran Bretaña). Distribución: Radio Films S.A.E. (España). Fotografía: Leon Shamroy. Música: Alex North. Dirección artística: John Decuir y Jack Martin Smith. Decorados: Dario Simoni. Vestuario: Vittorio Nino Novares. Montaje: Samuel E. Beetley. Duración: 139 minutos. Estreno: octubre de 1965, Estados Unidos.

INTÉRPRETES: Charlton Heston (Miguel Ángel), Rex Harrison (Julio II), Diane Cilento (Contessina de Médici), Harry Andrews (Bramante), Alberto Lupo (duque de Urbino), Adolfo Celi (Giovanni de Médici), John Stacy (Sangallo), Tomas Milian (Rafael de Sancio), Venantino Venantini (Paris de Grasis), Fausto Tosi (capataz), Alec McCowen (cardenal).

INFORMACIÓN PREVIA

La novela de Irving Stone relata la vida del artista desde su llegada en 1488 al taller de Ghirlandaio en Florencia con trece años, hasta que muere a los ochenta y nueve en Roma, en 1564; sin embargo, la película se centra sólo en el periodo en el que el artista realiza las pinturas del techo de la Capilla Sixtina, es decir, entre 1508 y 1512, por tanto no se trata de una biografía.

El núcleo argumental es el proceso de creación y las conflictivas relaciones de poder que mantuvieron Buonarotti y el Papa Julio II, que pone de manifiesto las distintas mentalidades ante la obra de arte. El promotor solo aspira a que se finalice y el artista sólo aspira a crearla.

El film sigue la moda del star-system, más propia del cine norteamericano de los años cincuenta que de esta década, y recurre a estrellas muy populares y vinculadas al género histórico. Rex Harrison, representa bien a Julio II, en su verdadera dimensión, más como señor feudal que como jefe de la Iglesia Católica. A pesar de ello, no guarda ningún parecido con aquel y esto se puede comprobar a través del retrato que hizo del Papa Rafael de Sancio entre 1511 y 1512. Lo mismo sucede con Charlton Heston que no se corresponde en nada con la figura de Buonarotti, hombre de complexión menuda y nariz torcida y seguramente nada atractivo en su apariencia.

APROVECHAMIENTO DIDÁCTICO/OBSERVACIÓN:

A modo de prólogo documental, los primeros diez minutos de la película son un repaso muy somero a la trayectoria artística de Buonarroti. Sin embargo, el film en sí se centra exclusivamente en la elaboración de la Capilla Sixtina y la relación entre el artista y el Papa. Esto resta gran parte del interés didáctico, sobre todo en lo que a la correspondencia con el currículo se refiere, ya que éste centra su atención sobre todo en la faceta como escultor de Miguel Ángel. Este aspecto se ve acrecentado por un ritmo cinematográfico (en demasiadas ocasiones) injustificadamente lento que hace que la narración se resienta.

Sin embargo, desde el punto de vista didáctico, lo mejor de esta película son los momentos en los que se muestra, con detalle y acierto, la elaboración técnica de los frescos, desde su boceto, el calco, la preparación del muro y, finalmente, la aplicación de la pintura.

Sin embargo, desde el punto de vista didáctico, lo mejor de esta película son los momentos en los que se muestra, con detalle y acierto, la elaboración técnica de los frescos, desde su boceto, el calco, la preparación del muro y, finalmente, la aplicación de la pintura.

Al comienzo de la película, se nos presentan Bramante dirigiendo las obras de San Pedro del Vaticano y, después a Rafael, que es presentado por éste al papa, por lo que hay un intento de contextualizar el ambiente artístico de la Roma de la época.

Mientras está realizando los frescos de la capilla, en la película aparecen opiniones críticas por la inclusión del desnudo en el tema decorativo, y su arte recibe el calificativo de *"obsceno y demasiado inspirado en el de los griegos"*. Esto no coincide exactamente con la realidad, ya que este debate surgió en torno al Juicio Final que pintaría años más tarde. En la época en que se realizó el techo de la Sixtina, existía una mentalidad más abierta en este sentido que se hará más restrictiva a partir del Concilio de Trento (1545).

La película no entra a fondo en las características humanas de Miguel Ángel, lo mitifica excesivamente con el objetivo de hacerlo más atractivo en la pantalla y que sus problemas sean los derivados de su fuerte carácter y de su afán de perfección. Mitifica la figura del artista para presentarlo como un ser excepcional: *"Lo que tiene Miguel Ángel en las venas no es sangre, sino pintura"* dice Julio II. Por lo tanto, Buonarroti es, según la película, un personaje extraño, algo soberbio, bastante arrogante y muy insatisfecho, que se exige mucho a sí mismo y que está obsesionado, día y noche, con crear. Son los rasgos definitorios del genio. Todo se justifica en aras de la creación y del resultado final: la obra de arte.

En ningún momento se vislumbra su homosexualidad, que hoy le está plenamente reconocida. Se sabe que en su vida hubo un gran amor, o al menos un amor continuado en el tiempo, que fue Tommaso dei Cavalieri, 41 años más joven que él, al que conoció en 1532, y que estuvo a su lado hasta el final de sus días. Miguel Ángel le escribió unos trescientos sonetos de amor que publicó su sobrino-nieto con la dedicatoria cambiada -donde ponía "a mi amado" puso "a mi amada"-. Lógicamente en el film este personaje no aparece, ya que lo conocería posteriormente al momento en el que se desarrolla la acción. Dicha homosexualidad se oculta en el film mediante la alusión a una historia de amor imposible con Contessina de Médici hija de Lorenzo el Magnífico, y con la que había convivido de adolescente en el palacio florentino. Ella es la que acude a cuidarle a Roma cuando cae del andamio desde el que estaba pintando el techo de la Sixtina. Se la muestra, al igual que en la novela, como una mujer totalmente enamorada, pero su amor no tiene respuesta por parte de él ni es correspondido, aunque sabe que *"si alguna vez me he enamorado ha sido de ti"*. Tal situación no se atribuye a la condición de homosexual de Buonarroti, sino al falso argumento de que en su vida sólo cabe la creación artística y, por lo tanto, *"no hay sitio en mí para el amor"*. "*La medicina que Miguel Ángel necesita no es amor sino trabajo*", llega a decir Julio II. En la escena final Contessina insiste en la idea de que los afectos están en la creación artística diciendo: *"Hay mucho más amor aquí del que puede existir entre un hombre y una mujer"*. Recapitulando, la relación amorosa entre Miguel Ángel y Contessina no pudo suceder en la realidad, se trata de una cortina de humo para ocultar la conocida homosexualidad el creador.

Toda la película parte de presunciones. Se representa al protagonista enfrentado con otros artistas contemporáneos y muy competitivo en las relaciones con ellos. La enemistad va especialmente contra Bramante, porque ambos se disputan las obras arquitectónicas de San Pedro del Vaticano y, colateralmente, contra Rafael de Sancio , propuesto por Bramante a Julio II para que pinte la Capilla Sixtina en sustitución de Buonarroti. Rafael está haciendo entonces *La Escuela de Atenas* y es un rival.

Es sabido que Miguel Ángel era hombre de fuertes convicciones religiosas. Pero esa circunstancia se intensifica en exceso hasta el extremo de atribuir la inspiración a la intercesión divina y hacer creer al espectador que el tema de la creación de Adán, que pinta en lugar de los Apóstoles que quería el Papa, se lo manda Dios porque en un amanecer creyó ver ese pasaje del Libro del Génesis. En consecuencia, se insiste en el mensaje de que el trabajo acabado es producto de la voluntad divina.

Es sabido que Miguel Ángel era hombre de fuertes convicciones religiosas. Pero esa circunstancia se intensifica en exceso hasta el extremo de atribuir la inspiración a la intercesión divina y hacer creer al espectador que el tema de la creación de Adán, que pinta en lugar de los Apóstoles que quería el Papa, se lo manda Dios porque en un amanecer creyó ver ese pasaje del Libro del Génesis. En consecuencia, se insiste en el mensaje de que el trabajo acabado es producto de la voluntad divina.

El papa felicita al autor y le transmite su deseo de que pinte el ábside de la capilla con el tema del Juicio Final, lo que comenzaría a hacer veinticuatro años más tarde, en 1536, por encargo de Clemente VII, primero, y de Pablo III después.

ACTIVIDADES/APLICACIÓN:

1. ¿Por qué la Capilla Sixtina recibe ese nombre? ¿Por qué era tan querida para Julio II? ¿Cómo define en la película Miguel Ángel la arquitectura de esta capilla?.

2. ¿Qué importante acontecimiento tiene lugar en esa capilla incluso hoy en día?

3. Miguel Ángel fue arquitecto, escultor, pintor y poeta, pero... ¿Con cuál de estas actividades se sentía más identificado?

4.¿Qué otros artistas aparecen en el film?

5. ¿Sabrías explicar en qué consiste la pintura al fresco y el estarcido? Busca información acerca de estas técnicas cuyo proceso se puede apreciar en la película.

6. Como hemos mencionado, los actores no se parecen mucho a los personajes históricos que representan. Para contrastar esta información busca en internet el retrato de Julio II realizado por Rafael de Sancio entre 1511 y 1512, que es la época en la que se centra la película, y descríbelo comparándolo con el personaje de la película. Haz lo mismo con el retrato Retrato de Miguel Ángel realizado por Marcello Venusti hacia 1535 (15 años más tarde).

7. ¿Conoces algún artista actual que haya pintado también un techo o bóveda despertando la polémica?

CONCLUSIONES:

Se ha procurado dar respuesta a aquellos docentes que deseen tomarse en serio el cine como un recurso didáctico y aprovechar todas las ventajas formativas que presenta. En este proceso, se ha mostrado cómo la figura del profesor es la piedra angular, filtro, guía y mediador entre los diferentes agentes que implica: la cultura, el entretenimiento, la disciplina científica y su aprendizaje.

Desde la perspectiva más concreta de la Historia del Arte de 2º de Bachillerato, es importante destacar cómo el cine sirve de punto de partida tanto para la adquisición de nuevos conocimientos como para la reflexión sobre actitudes, contextos y puntos de vista que pueden incluso dar pie al debate en clase.

Los conocimientos que se pueden adquirir a través de este medio, son numerosos, y cada profesor puede indagar en los diferentes aspectos a los que puede dar pie el film para sus propósitos educativos.

Otro punto fundamental a la hora de realizar este trabajo ha sido el desarrollo de determinadas actitudes a través de la aplicación de los métodos y materiales expuestos. De entre todas ellas, las más importantes serían la reflexión y el espíritu crítico, no solo para abordar el visionado de un film, sino como una herramienta fundamental para el desarrollo hacia la madurez del alumno. Dichas actitudes, se han complementado con otras también esenciales como: la puesta en valor del patrimonio histórico-artístico, el papel fundamental -y muy desdeñado- de la mujer a lo largo de la historia, así como la reflexión sobre los condicionantes contextuales de la obra de arte: religión, política, sociedad y clientela.

Todo esto es lo que se ha querido poner de manifiesto con este trabajo. Pero lo más importante es destacar que se requiere un cambio de actitud en el ámbito educativo para incluir de forma efectiva métodos innovadores y eficaces adaptados a la sociedad que nos rodea.

A modo de colofón, la siguiente cita podría resumir la esencia de la propuesta que se acaba de exponer:

"Aquel que intente encontrar la diferencia entre educación y

entretenimiento no tiene ni idea de ninguna de las dos cosas"

Marshall McLuhan, El aula sin muros, 1968

BIBLIOGRAFÍA:

- CAMARERO, G. (2009): *Pintores en el cine*. Madrid: Ediciones JC.
- CARPENTER, E., MCLUHAN, M., (1968): *El aula sin muros*. Barcelona: Cultura Popular.
- DE LA TORRE, S. (1996). *Cine formativo, una estrategia innovadora para los docentes*. Barcelona: Octaedro.
- FERNÁNDEZ SEBASTIÁN, A. (1988). *Cine e Historia en el aula*. Madrid: Akal.
- MARTÍNEZ- SALANOVA SÁNCHEZ, E. (2002): *Aprender con el cine, aprender de película. Una visión didáctica para aprender e investigar con el cine*. Huelva: Grupo Comunicar.
- ROMAGUERA, J. y RIAMBAU, E. (1983): *La Historia y el Cine*. Barcelona: Fontamara.

- RUIZ RUBIO, F. (1994): "Cine y enseñanza". En *Comunicar*, 3, pp. 74-80.

TÍTULO: TALLER DE LECTURA EN EL AULA DE CIENCIAS SOCIALES

AUTORA: Mª Isabel Sánchez Merino
mapelmacroquet@hotmail.com

TUTORA: Mª. Montserrat Pastor Blázquez(Departamento de Didácticas Específicas, UAM)

NOTA CURRICULAR DE LA AUTORA: Mª Isabel Sánchez Merino, es licenciada en Historia del Arte por la Universidad Autónoma de Madrid. En junio de 2011 obtuvo el título de Máster en Formación del Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato (Especialidad en Geografía e Historia) en esta misma universidad.

RESUMEN: A nivel práctico, planteo una propuesta de taller de lectura en el aula de Ciencias Sociales en 4º de la ESO, para ello, he tomado como referencia, las encuestas sobre hábitos y gustos lectores que he realizado durante el período de prácticas, y un análisis de los problemas que plantean los manuales de texto que se utilizan en Ciencias Sociales. A partir de esto, y del estudio del análisis de la cuestión, he realizado una hipótesis general de trabajo con textos con los que pueden trabajarse los objetivos de etapa, de área y las competencias en la ESO, de forma adecuada al currículo. Finalmente, propongo dos proyectos concretos para trabajar los objetivos específicos del 4º curso de la ESO, en un grupo y en un centro determinados

OBJETIVOS DEL TFM:

En el Trabajo Fin de Máster propongo el taller de lectura como método, en el aula de ciencias sociales, en una dirección que recoge muchas de las iniciativas apuntadas en los planes de lectura que se están promoviendo en las diferentes comunidades autónomas y que señalan la necesidad de trabajar la competencia lectora en cada una de las asignaturas. Una lectura con el objetivo de ir más allá de la simple obtención de datos del libro de texto, reflexionando y evaluando críticamente el contenido, analizando el texto y sus dimensiones contextuales, entre otras, espacio y tiempo, cuyo aprendizaje es necesario para saber quiénes somos, y que en definitiva son las dos coordenadas vertebradoras de las ciencias sociales, y por ello, tan necesario trabajarlo desde esta asignatura. La innovación que persigue este trabajo es la de ampliar la diversidad del tipo de textos (acercándonos al universo de interés del alumno), así como el tipo de actividades en torno a la lectura que se emplean habitualmente en las aulas de ciencias sociales y que se promueven desde los libros de texto, siguiendo algunos principios de innovación metodológica.

Podría decirse que gran parte de la comunidad educadora está de acuerdo en la necesidad de planificar las actividades de trabajo partiendo de fragmentos de los textos y las fuentes con los que trabaja el historiador. La mayoría de los libros de texto actuales ya integran esa necesidad incorporando documentos y fuentes primarias, el problema es que las actividades o preguntas que se plantean para trabajar dichos textos la gran mayoría de ocasiones no están dirigidas para que el alumno comprenda el mundo en que vive, perdiendo las posibilidades de un aprendizaje significativo y el sentido de los objetivos de la educación. No obstante, reconozco las posibilidades de trabajo que ofrecen algunos de los manuales y por eso aclaro que esta propuesta no es excluyente de ellos. El problema, es que muchas de las actividades de los manuales no se dirigen al desarrollo de un pensamiento complejo, limitándose a preguntar por los contenidos que aparecen escritos en esa misma página, con preguntas lineales de comprensión del texto. Este tipo de preguntas por supuesto, son necesarias, pero es necesario plantear otro tipo de cuestiones y retos al alumno para que pueda progresar, madurar y pensar por sí mismo. Preguntas más "detectivescas", planteadas desde el conocimiento que ya posee el alumno, para que el alumno piense.

Trabajar en el aula de Ciencias Sociales con la metodología de Taller de Lectura, requiere que la programación didáctica integre estrategias y actividades que permitan guiar a los alumnos en la lectura y enseñar a comprender los textos seleccionados para trabajar los objetivos que se señalan en el currículo secuenciados en las diferentes Unidades Didácticas.

METODOLOGÍA:

¿Por qué un "taller"?, porque este concepto se ajusta más a la metodología que se va a desarrollar. Una metodología dirigida a crear situaciones en los que el alumno de forma activa (metodología activa), construye de forma significativa su aprendizaje (metodología constructivista) y practica las destrezas asociadas a las diferentes competencias que se pueden desarrollar a través de una rica propuesta de actividades, partiendo de una amplia variedad de textos, pudiendo elaborar trabajos o proyectos de forma interdisciplinar, manteniendo tres principios metodológicos: principio de globalización, individualización y de socialización.

Desarrollar en el Aula de Ciencias Sociales un Taller de Lectura implica que el profesor sea consciente de la importancia y atención que esta requiere para utilizarla realmente como un recurso efectivo, que implique el desarrollo de habilidades complejas en el alumno, útiles en el aprendizaje académico y en el aprendizaje para toda la vida. Para guiar las situaciones de lectura en el aula, fijaremos distintos objetivos y tipos de intervenciones. Este taller propone en un primer momento, seguir el orden recomendado por Emilio Sánchez de Miguel (2010) y para ello seguiremos su esquema de trabajo que resumo a continuación y el cual pondremos en práctica en los momentos de lectura de la clase de Ciencias Sociales. Emilio Sánchez de Miguel distingue tres tipos de niveles: 1. Las lecturas que cuentan con “planes” que organizan la actividad (el profesor advierte qué temas se descubren con la lectura). 2. Lecturas con “proyecto para el texto”, donde no sólo se explica qué se aprende con la lectura sino por qué merece la pena esa lectura. 3. Lecturas con un formato de “doble proyecto”, consistiría en plantear la lectura de un texto concreto como un medio para resolver un problema más amplio propuesto de antemano.

Este taller también integra actividades alimentadas desde el enfoque de Cassany (2006), que subraya la importancia de los aspectos socioculturales de cada artefacto letrado: cómo, cuándo, dónde se produce cada artefacto, para conseguir qué, para qué y de qué manera. A continuación, explico los puntos más relevantes de mi propuesta práctica a nivel de aula, a través de algunos ejemplos de actividades, dirigidas a un grupo de alumnos de 4º de la ESO.

PROPUESTAS INNOVADORAS:

La primera de mis propuestas es, *PROYECTO BRADBURY*. Consiste en escribir un capítulo más de Fahrenheit 451 de RayBradbury (1953), de forma colectiva insertándolo en el siguiente contexto: “Granger presenta a Montag los Hombres Libro más valientes de los bosques, aquellos que deberán recordar los valores de la enseñanza que se transmiten a través de la comprensión de los hechos históricos, que han de ser conservados y transmitidos para construir un futuro mejor, los Hombres Libro de Historia." (Texto de elaboración propia)De esta forma, este proyecto, integra lecturas que cuentan con "planes" y lecturas con "proyecto para el texto".

Para ello vamos a crear Hombres Libro de forma individual en una primera fase y posteriormente se trabajará de forma grupal. Para ello se elaborarán Fichas de Personaje, donde aparezcan los siguientes apartados: 1.Nombre del personaje. 2. Contexto: Cronología, Localización. 3 Breve presentación del personaje, indicando su nivel socio-cultural y profesión. 4. Rasgos de la personalidad del personaje en relación a su contexto. 5. Cita dos libros que haya leído.6. Descripción física: Edad, ropa, elementos que le caracterizan. 7. Escribe un texto para el personaje que has creado. (Puedes elegir entre dos opciones: A. Una visión personal del personaje. B. Elaborar un mensaje valioso para el futuro.) 8. Ambiente sonoro que acompañe al texto y al personaje. 9. Bibliografía y otras fuentes empleadas.

En los inicios del proyecto, esta tarea será similar a las actividades sobre biografías de personajes históricos, un tipo de actividad que está en la tradición de la enseñanza de las Ciencias Sociales. En una fase más avanzada del proyecto, la Ficha de Personaje va haciéndose más compleja, al integrar contenidos y objetivos que se estudian desde el área de Lengua Castellana y Literatura e incluso de Música. A lo largo del 4º curso se estudia la estructura de los textos: expositivos, argumentativos, prescriptivos, el informe, el folleto, la carta formal, un ensayo, un discurso, una columna, una crónica o un editorial. Como actividades, en Lengua y Literatura, suelen analizarse fragmentos de este tipo de textos, y además escribir uno de forma personal. Este tipo de actividades son las que pueden trabajarse dentro del Proyecto Bradbury, y trabajar así, de forma interdisciplinar e incluso interdepartamental.

En mi segunda propuesta, he elaborado una batería de diferentes tipos de actividades en torno a *1984 de George Orwell*. Esta ha sido mi forma de seleccionar textos y actividades sobre lecturas con un formato de "doble proyecto", por eso uno de los objetivos fundamentales de esta guía, es desvelar los mecanismos del mundo real que podemos encontrar en las lecturas de ficción, para ello reflexionaremos no sólo sobre el texto, sino sobre cuestiones de la historia y de la actualidad.

Actividad. Señala cuáles de estos sucesos reales e históricos podrías relacionar con el siguiente texto de Orwell. Lee las diferentes posibilidades, recuerda en cada caso lo que sabes y ya has estudiado (los alumnos explican oralmente cada punto). Lee el texto (seleccionado de la página 83), subraya las partes en las que encuentres similitudes y posteriormente elige entre las posibles opciones citadas (puede haber varias). *Crisis económica. Marcha sobre Roma. Incumplimiento del Tratado de Versalles. Sociedad de Naciones. Juventudes hitlerianas. Política antisemítica, etc.*

Actividad 7. Orwell mismo dijo: “Yo no creo que el género de sociedad que describo vaya a suceder forzosamente, pero lo que sí creo, si se tiene en cuenta que el libro es una sátira, es que puede ocurrir algo parecido” Orwell (Escobar, 1984, p. 44) Realizad una investigación en Internet, sobre la historia y situación política actual de Corea del Norte. 1. Con la información recogida, poned en común la información. 2. Analiza cómo se transmite la información sobre Corea del Norte, en esta página http://www.north-korea-travel.com/corea-del-norte.html. 3. En base a esta información, elabora una valoración crítica sobre esta página e indica qué palabras te han llamado la atención.

A continuación destaco fragmentos que deberían subrayar o llamar la atención de los alumnos. “Nuestro objetivo es el de permitir a gente de todo el mundo descubrir este fascinante país (…). Muchos de nuestros clientes lo describen como uno de los lugares más insólitos y surrealistas que han visitado.”

Después de acercarte a la situación actual en Corea del Norte. ¿Crees que este diálogo de 1984, podría también expresar la manipulación ideológica en este país actualmente? “- (…) ¿No te das cuenta de que el pasado, incluso el de ayer mismo, ha sido suprimido? (…) Todos los documentos han sido destruidos o falsificados, todos los libros han sido otra vez escritos, (…). La Historia se ha parado en seco. No existe más que un interminable presente en el cual el Partido lleva siempre razón. Naturalmente, yo sé que el pasado está falsificado, pero nunca podría probarlo (…)”

CONCLUSIONES:

Es importante considerar y valorar el tipo de lecturas que realizan los adolescentes de forma voluntaria. Para ello, durante el período de prácticas, realicé un cuestionario de hábitos de lectura, del que destaco algunas conclusiones. En primer lugar, que muchas variables de los motivos que permiten que un alumno/a se convierta en lector se escapan de nuestras manos, y en segundo lugar, que la lista de lecturas obligadas, no funciona como medio de promoción y disfrute de la lectura. Por ello, creo necesario introducir actividades de acompañamiento, ayudando y enseñando a comprender en las lecturas seleccionadas, permitiendo crear un ambiente en el que puede que se desarrolle cierto interés por la lectura, por el conocimiento y sobretodo se pueda dirigir de tal manera que se transmitan esquemas de aprendizaje, así como un modelo de lector activo y crítico. Pero este trabajo de lectura debe realizarse desde las distintas disciplinas, en concreto señalo aquí, la asignatura de Ciencias Sociales porque uno de los objetivos, es que este modelo de lector, valore el conocimiento del pasado como una forma de mejorar su presente y su futuro.

¿Por qué he utilizado 1984? 1984 estaba entre las lecturas que se recomiendan para esta edad en los institutos, y además existen estudios que relacionan esta obra con la historia, desde una mirada experta, un aspecto importante que me ha dado seguridad para diseñar las actividades. Desde esta perspectiva, no he cubierto completamente uno de los objetivos iniciales: utilizar las lecturas que realizan los alumnos de forma voluntaria. Este objetivo es complejo y requiere el apoyo de la investigación educativa y la financiación para desarrollar este tipo de recursos.

La lectura es una herramienta para Aprender a conocer básica, y que ha de reforzarse de forma conjunta por toda la comunidad educativa, no sólo los diferentes profesores del centro, a través de un trabajo interdepartamental y una metodología interdisciplinar, sino la familia y la sociedad. Las Comunidades tienen diferentes Planes y Proyectos que favorecen la adquisición de hábitos lectores, pero quizás la carencia más importante está en desarrollar un tipo de lectura crítica. Integrar en las clases más lecturas de uso diario en los que es necesario leer entre líneas, fomentar la lectura comparada de noticias, o la lectura guiada del contenido de páginas Web, son más necesarios en el mundo que vivimos que otro tipo de lecturas académicas.

Para comprender la estructura de los textos, los diferentes géneros, o la intencionalidad de los diferentes discursos, es muy importante fomentar no sólo la lectura, sino la práctica de elaborar textos, la escritura (Aprender a hacer). Este tipo actividades, más activas, creativas por parte del alumno y que además puede ser compartida, como se propone en el Taller de Lectura, mediante el trabajo grupal, la edición de textos en el Blog, o la elaboración grupal del capítulo de un libro, permite compartir con los demás la experiencia de aprendizaje personal, tendiendo hacia objetivos comunes (Aprender a vivir juntos y Aprender a ser)

En definitiva, para trabajar en el aula de Ciencias Sociales con la metodología de Taller de Lectura, es necesaria la formación del profesorado, la financiación de las administraciones y una implantación gradual de este tipo de metodología que permita experimentar y promover proyectos de forma interdepartamental.

BIBLIOGRAFÍA:

- CASSANY, D. (2006): *Tras las líneas. Sobre la lectura contemporánea*. Barcelona: Anagrama.

- SÁNCHEZ MIGUEL, E. (Coord.) (2010): *La lectura en el aula. Qué se hace, qué se debe hacer y qué se puede hacer*. Barcelona:Graò.

TÍTULO: LA FORJA DE UN REBELDE: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

AUTOR: Ramón Méndez Andrés
ramon.mendez@estudiante.uam.es

TUTORA: Montserrat Pastor Blázquez(Departamento de Didácticas Específicas, UAM)

NOTA CURRICULAR DEL AUTOR: Licenciado en Historia en la especialidad de Historia Contemporánea (Universidad Complutense de Madrid). Máster en Didácticas Específicas en el Aula, Museos y Espacios Naturales (2011, Universidad Autónoma de Madrid). Actualmente realiza sus estudios de doctorado en educación por la UAM, con un proyecto titulado *Educación, Museos y Patrimonio Ferroviario*.

RESUMEN: Partiendo de la novela escrita por Arturo Barea, *"La forja de un rebelde"*, este artículo presenta un recurso didáctico destinado al aula de segundo ciclo de Educación Secundaria Obligatoria. Este proyecto permite trabajar el primer periodo del reinado de Alfonso XIII, en el marco de la materia de Historia; desarrollando los contenidos de evolución demográfica, económica y social de España y más en concreto de Madrid de principios del Siglo XX; fijando nuestra atención en el movimiento obrero, la vida rural y la condición, tanto femenina como de la infancia.

OBJETIVOS DEL TFM:

Concebido como una propuesta didáctica para el aula de 2º ciclo de Educación Secundaria Obligatoria, en el marco de la materia de Historia, los principales objetivos de este Trabajo de Fin de Máster son:

- Trabajar en el alumno las competencias básicas.
- Desarrollar los contenidos curriculares de historia marcados para la primera etapa de reinado de Alfonso XIII.
- Vincular la materia escolar con el patrimonio histórico próximo a los educandos.
- Fomentar el respeto hacia el patrimonio histórico.

METODOLOGÍA:

El argumento metodológico principal de nuestra propuesta es considerar que la enseñanza de las Ciencias Sociales debe vincular al alumno con su pasado para acercarle al presente; el desarrollo de la conciencia histórica es una de las claves para la creación de un espíritu crítico y de conciencia política y ciudadana. Para ello se diseña una dinámica basada en el aprendizaje por descubrimiento, un método de enseñanza activa. Esta metodología permite el desarrollo de actitudes y habilidades que la enseñanza pasiva no promueve. Se exige al alumno el giro del enseñar al aprender, y principalmente, enseñar a aprender a aprender, y aprender a lo largo de la vida.

Por tratarse de una metodología innovadora para el aula, puesto que no presenta ninguna novedad en contextos no formales, creemos conveniente tratarla más en profundidad en el capítulo "propuesta innovadora". Por otra parte, en cuanto a contenidos no es tan innovador, ya que uno de los objetivos es específicamente desarrollar el currículo oficial de la materia. Por ello trabajaremos con nuestros alumnos los siguientes temas del periodo:

- El cambio de signo demográfico.
    - Los problemas del campo.
    - La evolución de la ciudad y la industria.
- El movimiento obrero.
- La condición femenina.
- La condición infantil.

Tampoco es innovador el uso de esta novela en la materia de historia, aunque generalmente más enfocado su uso a la etapa de bachillerato, podemos encontrar ejemplos como el realizado por el IES Cañada de las eras (2009).

PROPUESTAS INNOVADORAS:

Como ya hemos apuntado en la descripción de la metodología, lo realmente innovador del proyecto es la forma de trabajo en el aula. Desde nuestro punto de vista creemos que trabajar en equipo debe ser algo cotidiano de la vida escolar, a su vez, consideramos que debe estar fomentado desde el profesorado ampliando las competencias sociales de nuestros alumnos. Por ello la dinámica es un trabajo por equipo, donde grupos de 5-6 educandos investigan y preparan uno de los cinco temas de trabajo seleccionados. En este modelo de trabajo es importante que el profesorado participe de forma indirecta en la observación del trabajo del equipo y el trabajo individual de cada alumno, interviniendo, solo en caso necesario, para equilibrar trabajo y fomentar un desarrollo gradual del mismo.

A su vez, la dinámica se ha organizado con una actividad final donde utilizaremos el sistema de aprendizaje cooperativo en el aula. En este punto los equipos en que se había dividido el aula exponen los temas que han trabajado para todos sus compañeros, fomentando el aprendizaje activo, posteriormente se organiza desde el profesorado un aula circular y se afirman sentencias conflictivas sobre lo estudiado, los alumnos debaten sus impresiones afianzando los contenidos trabajados y haciendo uso de sus conocimientos para sus relaciones sociales. Se trata de un aprendizaje que evita la competición, como ya veremos, todos los alumnos aportan, tras su investigación y aprendizaje, sus conclusiones, ayudando a que el aula obtenga una visión global del primer tercio de Siglo XX. Esto es posible porque en la actividad cada uno de los equipos trabajará un tema diferente en relación con el tema, por ello no se puede considerar terminada la actividad sin esta fase. De esta forma, los objetivos de los participantes se hallan estrechamente vinculados, de tal manera que cada uno de ellos sólo puede alcanzar sus objetivos si y sólo si los demás consiguen alcanzar los suyos.

El proyecto tiene una duración estimada de una semana y media. Una mañana dedicada a la visita por Madrid y las clases de historia correspondientes a la semana siguiente. Se completa la propuesta con trabajo de lectura e investigación en grupo fuera de aula. Explicamos ahora brevemente cada una de las actividades propuestas en la dinámica:

a) Visita a Madrid: Una mañana

La actividad de visita al centro de Madrid da comienzo a la dinámica, esta actividad se inicia en el centro educativo, donde dedicaremos la primera hora a explicar el funcionamiento de la dinámica a los alumnos siguiendo los siguientes puntos:

- Establecimiento de los equipos. 5 equipos de 6 integrantes cada uno.
- Explicación de los objetivos de la dinámica.
- Reparto de temas a estudio:

  - Mundo rural.
  - Mundo urbano
  - Conflictividad social y nacimiento del movimiento obrero.
  - Condición femenina a principios del Siglo XX en Madrid.
  - Condición infantil a principios del siglo XX en Madrid.
- Explicación de la actividad "Visita al centro de Madrid"
- Entrega del material general y la primera pista a cada equipo.

Una vez divididos por temas de estudio los alumnos buscarán, acompañados por profesores, los fragmentos de la novela propuesta que hacen referencia a su tema de trabajo. Por motivos de espacio, los itinerarios y fragmentos a los que nos referimos, no se especifican en este artículo, se encuentran indicados en el texto completo del Trabajo de Fin de Máster. Dichos fragmentos se van localizando siguiendo referencias escritas, descripciones, pistas, planos, etc. Se pretende que los lugares tengan relación con el texto de la novela que van a leer, de esta forma ayudamos a crear el vínculo entre el pasado y el presente al que hemos hecho referencia. A su vez, la actividad se completa con pruebas a realizar en los lugares donde están, fomentando una actitud investigadora, relacionando el pasado con el presente e impulsando la relación del alumnado con los vecinos y comerciantes de los lugares.

b) <u>Organización del trabajo en equipo y trabajo en casa</u>. Una clase.

En la siguiente clase a la visita indicaremos los puntos que cada equipo tiene que desarrollar en la exposición en el aula. Para ello dividiremos la clase en los equipos ya formados para la actividad anterior y entregaremos las cuestiones pertenecientes a cada uno de los temas propuesto junto al material y fuentes que creamos puede ayudar a cada uno de los equipos.

c) <u>Presentación del trabajo en el aula</u>. Dos clases.

Aunque esta actividad no presenta en la actualidad del aula una práctica innovadora, creemos conveniente señalar que la implicación del profesorado es fundamental, tanto para el éxito de la propuesta como para la motivación del alumnado.

d) Puesta en común y debate de los contenidos aprendidos. Una clase.

Para finalizar la dinámica realizaremos en el aula un debate sobre lo expuesto en clase, esta actividad tiene como objetivo hacer un uso práctico de los conocimientos adquiridos. Esta actividad de debate complementa el desarrollo de tres competencias básicas, por un lado la de comunicación lingüística, la de la autonomía e iniciativa personal y la competencia social y ciudadana, con el respeto del turno de palabra, creación y exposición de opinión, entre otros aspectos. Intentaremos tratar todos los temas estudiados por el alumnado a modo de celebración final de la dinámica. Para esta actividad el profesor debe hacer la figura de moderador del debate y presentar los diferentes temas con afirmaciones y preguntas.

Se señalan también los procedimientos que propone esta dinámica: Lectura del primer tomo de la Forja de un rebelde, *"La forja",* como fuente textual y primaria; utilización de vocabulario histórico; Uso de sistemas de representación gráfica de tiempo y demografía. A partir de las fuentes disponibles hemos elegido un hilo básico para cada uno de los temas y hemos identificado el listado de vocabulario histórico que ha de conocer y utilizar el alumnado.

FUENTES	VOCABULARIO
• Línea del tiempo de La Restauración. • Cuadros estadísticos de la evolución de la población española. • Mapa de la estructura de la ciudad de Madrid en 1900 y cuadro estadístico de la evolución de la población en las principales ciudades españolas. • Cuadros estadísticos de la evolución de la agricultura en España (superficie en miles de hectáreas, producción, productividad, etc.). • Cuadros estadísticos sobre la evolución de precios, jornales, beneficios y producción de la industria en España. • Manifiesto del primer Comité Nacional de la CNT (1911). • Textos sobre la condición femenina en "La forja". • Textos en torno a la condición infantil en "La forja". • Ejercicio de síntesis: comparación y comentario de dos cuadros estadísticos, a) índice general de los precios y salarios en España (1913-1922) y b) Incidencia de las huelgas en España (1916.1929).	• Anarquismo. • Socialismo. • Semana Trágica. • Sindicato. • Producción. • Productividad. • Barbecho. • Arrendamiento. • Reforma agraria. • CNT. • PSOE. • UGT. • Casa del Pueblo. • Voto femenino.

CONCLUSIONES:

Las conclusiones que extraemos de nuestra propuesta se resumen en cuatro grandes líneas:

a) La novela es una fuente, no solo, literaria, sino también una fuente que nos acerca al pasado – desde el más lejano al más reciente- y nos ayuda a la reconstrucción del mismo.

b) En la novela también podemos encontrar un instrumento multidisciplinar. De esta manera hemos podido englobar en una sola obra el conocimiento del mundo rural, urbano, obrero, infantil y femenino de la primera etapa del reinado de Alfonso XIII (1902-1923).

c) La dinámica propuesta en este trabajo persigue el desarrollo de la competencia de aprender a aprender, que se revela como una de las competencias fundamentales para el desarrollo integral, no solo como alumno sino también como ciudadano.

d) A través de esta propuesta hemos conseguido, además del conocimiento de los contenidos curriculares, fomentar el espíritu de trabajo en equipo, con la adopción de metodologías cooperativas y activas.

BIBLIOGRAFÍA:

- TREPAT i CARBONELL, C. (1998): “La restauración, una didáctica para el bachillerato”. En *Aula. Historia Social,* 1, pp. 16-18.
- CONTRERAS ARROYO, B. (2010): “El trabajo en grupo dentro del aula”. En *Innovación y experiencias educativas*. CSIF: Granada.
- FERNÁNDEZ MARCH, A. (2006): “Metodologías activas para la formación de competencias”. En *Educatio siglo XXI: Revista de la Facultad de Educación*, 24, pp. 35-56.
- GABARDÓN DE LA BANDA, J.F. (2005): “La enseñanza del patrimonio. Propuestas educativas en torno al patrimonio local”. En *Investigación en la escuela*, 56, pp. 87–93.
- GILI RUIZ, R; VELASCO MEDINA, F. (1998): *Madrid 1998. Centro de documentación y recurso para la historia de Madrid*.(CD-Rom). Madrid: Universidad Autónoma de Madrid-Dayfisa.
- GÓMEZ, J.P; MOLINA RUBIO, A; ONTORIA PEÑA, A. (1999): *Potenciar la capacidad de aprender y pensar*. Madrid: Narcea.
- I.E.S. CAÑADA DE LAS ERAS. (2009): *Historias de la historia: Identidades en tránsito II.* Madrid: MEC.
- PAGÈS BLANCH, J. (2007): “¿Qué se debería enseñar de historia hoy en la escuela obligatoria?, ¿qué deberían aprender, y cómo, los niños y las niñas y los y las jóvenes del pasado?”. En *Revista Escuela de Historia*, 6, Salta: Universidad.
- PRATS, J. (2001): *Enseñar historia. Notas para una didáctica renovadora*. Mérida: Junta de Extremadura.

WEB:

- http://www.educa.madrid.org
- http://www.ub.edu/histodidactica/
- http://www.ite.educacion.es/
- http://www.rtve.es/alacarta/videos-audios/la-forja-de-un-rebelde

TÍTULO: LAS ACTIVIDADES PRÁCTICAS DE LABORATORIO EN PRIMERO DE BACHILLERATO: UNA REVISIÓN DE LAS PROPUESTAS EDITORIALES EN LA ACTUALIDAD Y UNA SELECCIÓN ADECUADA A CONTENIDOS Y CAPACIDADES

AUTORA: María del Carmen Escudero del Olmo.
macaesol@hotmail.com

TUTOR: Nicolás Rubio Sáez (Departamento de Didácticas Específicas, UAM)

BREVE NOTA CURRICULAR DE LA AUTORA: Licenciada en Biología (Universidad Autónoma de Madrid, 2008), Máster Oficial en Biología de la Conservación (Universidad Complutense de Madrid, 2009), Máster Universitario en Formación de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Especialidad en Biología y Geología (Universidad Autónoma de Madrid, 2011).

RESUMEN: Se ha realizado una revisión sobre la tipología de las llamadas prácticas de laboratorio que se han venido realizando clásicamente en nuestro país y las que actualmente se llevan a cabo en los centros de enseñanza en el nivel de 1º de Bachillerato. Estas prácticas pueden estar elaboradas por los propios docentes o bien extraídas de las que se proponen en los diferentes libros de texto de este nivel. También se presenta una propuesta sintética de selección y secuencia de actividades prácticas adaptadas a los contenidos del currículo y a las capacidades teóricas del alumnado.

OBJETIVOS DEL TRABAJO:

Los objetivos planteados para la realización de este trabajo han sido los siguientes:

- Realizar una revisión analítica de las prácticas de laboratorio que proponen diferentes editoriales en sus libros de texto, con la finalidad de conocer los tipos y naturaleza de las prácticas que se proponen actualmente.
- Obtener información, de una manera cualitativa, sobre cuáles son las actividades prácticas que realizan los alumnos de 1º de Bachillerato y de qué manera las llevan a cabo; mediante la elaboración y cumplimentación de una encuesta dirigida a una pequeña muestra aleatoria de profesores de primero de bachillerato de la Comunidad de Madrid.

- Realizar una propuesta sintética de prácticas de laboratorio para 1º de Bachillerato, que pueda ser utilizada por los profesores de todo el país, acorde con los contenidos del currículo del nivel y los criterios de evaluación que prescribe el Ministerio.

METODOLOGÍA:

Con el fin de conocer el estado actual de las actividades que se pueden estar realizando en 1º de Bachillerato, se ha llevado a cabo un estudio bibliográfico sobre los libros de texto que actualmente tienen en el mercado diferentes editoriales: Santillana (Castillo et al. 2008), Editex (López et al., 2008), SM (Pedrinaci et al., 2008), Vicens Vives (Fernández et al., 2009), Mc Graw Hill (García et al., 2007), Edelvives (García et al., 2008) y Bruño (Ferrer et al., 2008); para conocer cuáles son las actividades prácticas que en ellos se proponen para el 1º de Bachillerato en la materia de Biología y Geología. Se han analizado un total de 105 prácticas, de las cuales 17 son de Santillana, 11 de Editex, 15 de SM, 12 de Vicens Vives, 16 de Mc Graw Hill, 16 de Edelvives y 18 de Bruño. También se han consultado las editoriales de Anaya (Plaza et al., 2008) y Oxford (Cabrerizo et al., 2006), pero no se han incluido en este análisis debido a que no proponen actividades prácticas de laboratorio propiamente dichas. Este estudio se ha completado mediante una encuesta en la que se ha preguntado a distintos docentes de secundaria cuáles son y de qué manera realizan las prácticas de laboratorio en sus centros de enseñanza en este nivel. Los docentes consultados han sido catorce, pertenecientes a los siguientes centros de enseñanza de la Comunidad de Madrid: I.E.S. Ramón y Cajal, I.E.S. Ágora, I.E.S. El Pinar, I.E.S. García Morato, I.E.S. Mirasierra, I.E.S. León Felipe, I.E.S. San Juan Bautista, I.E.S. Federico García Lorca, I.E.S. Ramiro de Maeztu, I.E.S. Miguel Delibes, Colegio Lagomar, Colegio Retiro, Colegio Hermanos Maristas y Colegio Santa María del Bosque. Además se han consultado diferentes manuales de prácticas (García, 1967; Lillo et al., 1978; España et al., 1980; Page, 1981; Salom&Cantarino, 1983; Sánchez & Palomar, 1986) para conocer qué es lo que se ha realizado tradicionalmente y diferentes artículos científicos (Bastida et al., 1990; Minguens&Garret, 1991; Caamaño, 1992; González, 1992; Tamir& García Rovira, 1992; Hodson, 1994; Jaén & García-Estañ, 1997; Gil et al., 1999; González, 2010;

Álvarez, 2007) para conocer la opinión de diversos autores sobre el propio hecho de la realización de prácticas de laboratorio.

Por último, con toda la información obtenida, se ha planteado una propuesta sintética sobre prácticas de laboratorio para la Biología y Geología de 1º de Bachillerato que puedan ser utilizadas por los docentes de todo el estado.

PROPUESTAS INNOVADORAS

Se consideran propuestas innovadoras las realizadas en este Trabajo Fin de Máster, en relación con las actividades prácticas que se proponen -muchas en la línea del método del proyecto-, y que son las siguientes:

- Práctica 1. **Estudio morfológico de las rocas sedimentarias, magmáticas y metamórficas:** la clave dicotómica empleada y la relación de las rocas con sus utilidades.
- Práctica 2. **Estudio de las propiedades físicas de los minerales:** el estudio de los diferentes objetos que se fabrican a partir de minerales.
- Práctica 3. **Estudio de un suelo:** la elaboración de un pequeño proyecto a partir de los datos obtenidos de la práctica, las variables que afectan a la formación de un suelo y la relación que existe entre el suelo y la vegetación del lugar.
- Práctica 4. **Estudio de la geomorfología de paisajes a partir de la interpretación fotografías:** el estudiar la geomorfología de una manera más aplicada, utilizando fotografías e integrando en ella los conocimientos de las prácticas 1 y 2.
- Práctica 5. **Disección de una flor:** su propuesta bajo el enfoque de aprendizaje por descubrimiento dirigido.
- Práctica 6. **Observación de tejidos vegetales epidérmicos y de la mitosis en las células apicales de la raíz de cebolla:** integrar estas dos prácticas típicas en una sola, para permitir al alumnado conocer y razonar sobre los diferentes tipos de tejidos que hay en determinadas partes del vegetal.

- Práctica 7. **Utilización de una clave dicotómica para identificar los pinos de la Península Ibérica:** la identificación de un organismo a partir de sus hojas y sus frutos.
- Práctica 8. **Estudio morfológico de raíz, tallo y hojas:** el estudio de las partes de la planta enfocado a su mejor reconocimiento posteriormente en un trabajo de campo.
- Práctica 9. **Estudio de biotipos liquénicos:** el estudio de un liquen folioso como modelo de un organismo simbiótico.
- Práctica 10. **Observación de preparaciones microscópicas de tejidos animales:** la utilización simultánea de dibujos y preparaciones microscópicas para facilitar el aprendizaje y la realización de esquemas por los alumnos.
- Práctica 11. **Estudio de la anatomía externa del exoesqueleto de un erizo de mar:** el estudio a la lupa binocular deeste organismo como modelo de invertebrado.
- Práctica 12. **Conocimiento de las técnicas para elaborar una pequeña colección de insectos de órdenes tipo y estudio morfológico de los ejemplares preparados:** permitir al alumno realizar una colección a partir de una recolección de impacto mínimo, inculcándole actitudes hacia la conservación de la biodiversidad.
- Práctica 13. **Análisis morfológico e identificación mediante clave de conchas de moluscos bivalvos marinos:** el estudio de organismos que han recogido ellos mismos durante el periodo estival.
- Práctica 14. **Disección de una egagrópila de ave rapaz:** el estudio de los huesos a través de los encontrados de micromamíferos y el conocimiento de este proceso digestivo tan desconocido por muchos.
- Práctica 15. **Estudio de los microorganismos de una charca:** conocimiento de técnicas de recolección, el empleo de la clave dicotómica proporcionada y la utilización simultanea de clave y microscopio.
- Práctica 16. **Los mohos: cultivo, observación a la lupa y al microscopio e identificación de los géneros más importantes:** el estudio de estos organismos de una manera cercana, a través de los alimentos que ellos consumen normalmente.

CONCLUSIONES:

- Las prácticas de laboratorio es un tema que se ha venido discutiendo desde sus comienzos por parte de los docentes estando, por diversos motivos, unos a favor y otros en contra de su realización.
- Los libros de texto actuales ofertan un listado de prácticas en el que consideramos que solamente un 30% serían adecuadas para desarrollar por parte del alumnado. Las prácticas restantes contienen deficiencias tales como que los objetivos no estén explícitos, que el procedimiento sea totalmente algorítmico o que no sean adecuadas a la teórica capacidad cognitiva del alumnado.
- Los docentes de los centros de enseñanza consultados, realizan diferentes prácticas, aunque suelen predominar las disecciones y las que se utilizan lupa o microscopio, para la parte de biología; y mapas topográficos o el estudio de minerales o rocas, en la parte de geología. El tipo de prácticas y su número son independientes del libro de texto utilizado.
- Se aporta una selección de actividades prácticas de laboratorio para la materia de Biología y Geología de 1º de Bachillerato aplicables en todos los currículos del Estado. Dentro de cada una de las prácticas se ha destacado lo que consideramos que tiene un matiz innovador en relación con lo que es habitual en los textos y se lleva a cabo en los centros de enseñanza.

BIBLIOGRAFÍA

- ALBALADEJO, M.C. & CAAMAÑO, A. (1992): Los trabajos prácticos. En: Jiménez, M.P., Albaladejo, M.C. & Caamaño, A. (eds.): *Curso de actualización científica y didáctica. Didáctica de las ciencias de la naturaleza.* Madrid: Servicio de publicaciones del MEC. pp. 95-128.
- ÁLVAREZ, S. M. (2007): "Cómo desean trabajar los alumnos en el laboratorio de Biología. Un acercamiento a las propuestas didácticas actuales". En *Revista Iberoamericana de Educación.* 42/7, pp.1-13.
- BASTIDA, M. F., RAMOS, F. & SOTO, J. (1990): "Prácticas de laboratorio: ¿una inversión poco rentable?" En *Investigación en las Escuela*. 11, pp. 77-91.

- CAAMAÑO, A. (1992): "Los trabajos prácticos en ciencias experimentales. Una reflexión sobre sus objetivos y una propuesta para su diversificación". En *Aula*. 9, pp. 61-68.
- CABRERIZO, B., SANZ, M. & TAVIRA, P. (2006): *Biología y Geología 1º de Bachillerato*. Oxford: Oxford Educación, p. 335.
- CASTILLO, A., MELÉNDEZ, I. & MADRID, M. A. (2008): *Biología y Geología 1º Bachillerato* .Madrid:Santillana, Proyecto La Casa del Saber, p. 371.
- ESPAÑA, J. A., CONDE, J. G., FAUS, A., GIL, M., MARCOS, D., SAQUERO, J. L. (1980): *Actividades Prácticas de Ciencias Naturales/1*. Madrid: Editorial Dossat, S. A., p. 114.
- FERNÁNDEZ, M. A., MINGO, B. & TORRES, M. D. (2009): *Biología y Geología Bachillerato.* Barcelona: Vicens Vives, p. 353.
- FERRER, N., GARCÍA, M. & MEDINA, M. (2008): *Biología y Geología Bachillerato, Ciencias y Tecnología.* Madrid: Bruño, p. 383.
- GARCÍA, A. (1967): *Manual de prácticas de microscopia. Biología I.* Madrid: ENOSA, p. 209.
- GARCÍA, A. (1967): *Morfología y anatomía animal y vegetal (Biología II). Manual de prácticas.* Madrid: ENOSA, p. 263.
- GARCÍA, A., GONZÁLEZ, G., GARCÍA, A., MARTÍNEZ, M. I., PILAR, M. C. (2007): *Biología y Geología 1º Bachillerato.* Madrid: Mc Graw Hill, p. 359.
- GARCÍA, M., HOYAS, M. E. & SILGADO, A. (2008): *1º Bachillerato Biología y Geología, Ciencias y Tecnología.* Zaragoza: Edelvives, Proyecto zoom, p. 359.
- GIL, D., FURIÓ, C., VALDÉS, P., SALINAS, J., MARTÍNEZ-TORREGROSA, J., GUISASOLA, J., GONZÁLEZ, E., DUMÁS-CARRÉ, A., GOFFARD, M. & PESSOA DE CARVALHO, A. M. (1999): "¿Tiene sentido seguir distinguiendo entre aprendizaje de conceptos, resolución de problemas de lápiz y papel y realización de prácticas de laboratorio?" En *Enseñanza de las Ciencias*. 17 (2), pp. 311-320.
- GONZÁLEZ, A. (2010): "La importancia de las prácticas de laboratorio en la biología y geología y posibilidades para su desarrollo y evaluación". En *Innovación y Experiencias Educativas.* 28, pp. 1-10.
- GONZÁLEZ, M. (1992): "¿Qué hay que renovar en los trabajos prácticos?" En *Enseñanza de las Ciencias*. 10 (2), pp. 206-211.

- HODSON, D. (1994). “Hacia un enfoque más crítico del trabajo de laboratorio”. En *Enseñanza de las Ciencias.* 12 (3), pp. 299-313.
- JAÉN, M. & GARCÍA-ESTAÑ, R. (1997): “Una revisión sobre la utilización del trabajo práctico en la enseñanza de la Geología. Propuestas de cambio”. En *Enseñanza de las Ciencias de la Tierra.* (5.2), pp.107-116.
- LILLO, J., LÓPEZ, M. T., REDONET, L. F., ROBLES, F. & USERA, J. M. (1978): *Prácticas de Geología*. Valencia: Ecir, p. 224.
- LÓPEZ, N., VITORIA, V. M., RICO, O., FERNÁNDEZ-PORTAL, J., SOMOZA, J. J., ALFAGEME, V. & GIL, M. (2008): *Biología y Geología 1º Bachillerato*. Madrid: Editex, p. 359.
- MIGUENS, M. &GARRET, R. M. (1991): “Prácticas en la enseñanza de las ciencias. Problemas y posibilidades”. En *Enseñanza de las Ciencias.* 9 (3), pp. 229-236.
- PAGE, F.C. (1981): *Thecultura and use of free-living protozoa in teaching.* Cambridge: Institute of Terrestial Ecology. Natural EnvironmentResearch Council.
- PEDRINACI, E., GIL, C. & GÓMEZ DE SALAZAR, J. M. (2008): *Biología y Geología 1º Bachillerato.* Madrid: SM, p. 383.
- PLAZA, C., HERNÁNDEZ, J., MARTÍNEZ, J., CASAMAYOR, C., MARTÍNEZ-AEDO, J.J. & MEDINA, F.J. (2008): Biología *y Geología. Bachillerato 1.* Madrid: Anaya, p. 328.
- SALOM, F. &CANTARINO, M. H. (1983): *Curso de Prácticas de Biología General. Tomo II.* Madrid: HermannBlume Ediciones, p. 159.
- SÁNCHEZ, M. I. & PALOMAR, A. (1986): *El laboratorio de Ciencias Naturales*. Madrid: Ediciones Penthalon, p. 151.
- TAMIR, P. & GARCÍA ROVIRA, M. P. (1992): “Características de los ejercicios de prácticas de laboratorio incluidos en los libros de texto de ciencias utilizados en Cataluña”. En *Enseñanza de las Ciencias.* 10(I), pp. 3-12.
- WOOLNOUGH, B. &ALLSOP, T. (1985): *Practical work in science*. Cambridge: Cambridge University Press.

NOTICIAS Y COMENTARIOS

REFLEXIONES SOBRE LA COORDINACIÓN EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA: PROBLEMÁTICA Y RETOS

Mallavibarrena Martínez de Castro, Raquel[20]
Departamento Algebra, Universidad Complutense de Madrid.

La palabra coordinación es una de las más utilizadas en el ámbito educativo durante los últimos años. Forma parte de un conjunto de criterios de buenas prácticas y se considera, al menos en el plano teórico, que coordinarse es algo bueno para mejorar la educación.

Desde el comienzo de este artículo me declaro firme partidaria de la coordinación como ingrediente esencial del sistema educativo, sin embargo soy consciente y la experiencia como profesora así me lo dice, que llevar a la práctica mecanismos de coordinación de manera eficaz no es ni mucho menos fácil. Me centraré en la docencia de las Matemáticas, pues tal es mi trabajo diario, y también en la experiencia al respecto que me aportan distintas responsabilidades académicas que he tenido y la pertenencia desde hace unos años a las Comisiones de Educación de la Real Sociedad Matemática Española (RSME) y del Comité Español de Matemáticas (CeMat).

PROBLEMÁTICAS EN TORNO A LA COORDINACIÓN

Podríamos decir que la coordinación es lo contrario a que cada persona, estructura, entidad o unidad definida funcione con independencia del resto de personas, entidades etc…cuyos objetivos o desarrollos tengan que ver con la inicial. Inmediatamente se establece una gradación en los niveles de coordinación: ésta puede ir desde el mero conocimiento de “lo que hacen los otros” hasta un trabajo completamente vertebrado y sin fisuras que no se deje “ningún cabo suelto”.

Hay una idea en el subconsciente que relaciona coordinación con problemas, tensiones, complicaciones, decisiones finales que no gustan a casi nadie, el tener que comentar con los demás cómo va mi docencia etc…y que nos hace recelar de ella o aceptarla porque no nos queda más remedio.

[20] rmallavi@mat.ucm.es

Las distintas administraciones educativas caen también con frecuencia en la falta de coordinación: se hacen reformas en una etapa educativa sin contar suficientemente con las etapas precedente y siguiente, no suele ser habitual un empeño eficaz por parte de los responsables educativos en fomentar que haya una coordinación real en los distintos ámbitos. Las propias estructuras organizativas de ministerios y consejerías autonómicas dificulta a veces el intercambio de información, las iniciativas conjuntas etc.

La coordinación queda con mucha frecuencia como algo obligatorio pero en un nivel de mínimos y a partir de ahí es algo voluntario, para el que quiera. No es nada fácil saber cómo proceder cuando no hay consenso para tomar decisiones, si debe primar la coordinación o la libertad y autonomía de cada docente.

En lo que se refiere a las matemáticas varios debates y temas no cerrados ni resueltos aún, tienen que ver con la coordinación:

- Conexión y buena vertebración de los currículos de las distintas etapas, cómo ir desarrollando con eficacia el proceso de abstracción y formalización. Cómo ir llegando a la matematización a partir de planteamientos didácticos más enfocados a las aplicaciones de las matemáticas a la vida cotidiana, a las experiencias, a las ciencias, técnica…

- Qué mecanismos tenemos a nuestra disposición para facilitar los cambios de etapa educativa, que en matemáticas pueden ser muy abruptos.

- Cómo enseñar a estudiantes diversos, con distintas capacidades matemáticas, para que todos desarrollen al máximo la competencia matemática, la coordinación entre un curso y los siguientes sobre procedimientos y objetivos es importante a este respecto.

- Cómo debe ser la evaluación: totalmente coordinada pagando a veces el precio de disminuir el nivel de exigencia para contentar a todos, o dejando que cada profesor diseñe los métodos de evaluación que estime oportunos. Hay ciertamente planteamientos intermedios, ¿quién decide o quién dice la última palabra? ¿Son eficaces los departamentos en este punto o prefieren no presionar a sus profesores aunque éstos no se coordinen entre ellos suficientemente?

- El uso cada vez más extendido de las nuevas tecnologías necesita también de coordinación entre los cursos y las etapas: qué objetivo se persigue, que ventajas e inconvenientes tiene…

LA COORDINACIÓN COMO SITUACIÓN PROPICIA PARA OTRAS INICIATIVAS IMPORTANTES

Siempre he pensado y así lo experimento en el día a día, que para mejorar la educación matemática, además de la aportación de los expertos, es imprescindible el diálogo y debate entre los agentes educativos, entre los profesores en particular. El poner en común la experiencia, las dificultades y retos no solamente ayuda a la coordinación sino que amplía nuestra visión de los distintos aspectos educativos, nos hace relacionar unas problemáticas con otras y analizar causas y soluciones posibles.

Los mecanismos de coordinación son un caldo de cultivo muy adecuado para que se hagan análisis y surjan iniciativas:

- Todo lo relacionado con la formación inicial y permanente de los profesores de las distintas etapas educativas, se detectan logros y carencias y ello puede llevar a elaborar propuestas para mejorar la situación

- Las cuestiones propias de cada etapa educativa, la conexión con otras materias, cómo tener en cuenta lo interdisciplinar a la hora de estructurar nuestra docencia

- La innovación, los enfoques y recursos didácticos más adecuados

- La reflexión de cómo ir acompañando en cada etapa el proceso de madurez matemática de los estudiantes, manteniendo los objetivos propios de cada periodo pero a la vez pensando en los estudios anteriores y en los posteriores

- El interés por conocer experiencias de otros docentes y grupos de trabajo, tanto de nuestro entorno como de otros países.

- La inquietud por participar en foros, seminarios, cursos de actualización, o la lectura de revistas dedicadas a la reflexión y a las experiencias en educación matemática

CONSIDERACIONES FINALES

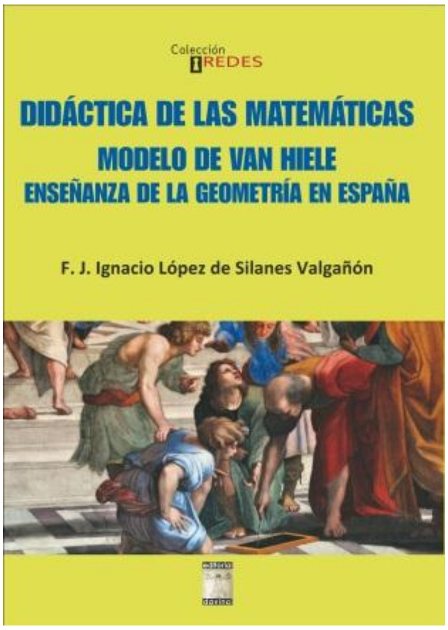
Un sistema educativo bien vertebrado y eficaz necesita, a mi juicio, de mecanismos de coordinación adecuados a todos los niveles, desde el legislativo para diseñar las leyes con visión de conjunto, hasta el más concreto del día a día de los centros docentes.

Un reto importante es generar una “cultura de la coordinación” que se construye evitando que pueda convertirse en una imposición para los docentes por parte de los responsables correspondientes, más bien al contrario, la coordinación lleva aparejada la participación y el diálogo.

El trabajo de equipo que aúne recursos en torno al logro de objetivos comunes facilitará que el día a día de la educación (y en concreto de la educación matemática) sea realmente una enseñanza – aprendizaje para todos los estudiantes: cada uno, según sus capacidades podrá ir avanzando para hacerse competente. Es ésta una de las cuestiones más difíciles de conseguir y más debatidas: los acentos en el refuerzo a alumnos con dificultades no deben ir en perjuicio de alumnos con más ritmo de trabajoy más aptitud, ¿cómo conseguirlo?

RESEÑAS BIBLIGRAFICAS

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS. MODELO DE VAN HIELE. ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN ESPAÑA
Editorial Davinci. Colección Redes
Florencio López de Silanes.



Es un libro que pretende ayudar a cubrir una laguna en España en el área de la Didáctica de las Matemáticas, ya que el modelo de van Hiele aplicado a la didáctica de la geometría en particular, y de las matemáticas en general, ha ido cobrando impulso y fuerza desde principios de la década de los 90 en todas las partes del mundo, tanto en países desarrollados como en los países de economía emergente, de forma que es un referente ineludible cuando hablamos de currícula y de los resultados alcanzados por los sistemas educativos que abarcan las etapas generales de la enseñanza.

A pesar de que la situación en España es algo diferente, este es uno de los países que confirman la regla, ya que existe un interés creciente por la didáctica basada en el modelo de van Hiele, en la comunidad educativa de los profesores de Primaria, Secundaria, Bachillerato y Universidad, que día a día requieren más información y de mayor contenido sobre el modelo de van Hiele. Así se buscan directrices y guías que permitan a los docentes, llevar a la práctica el modelo de van Hiele en sus escuelas, aulas de enseñanza media y universitarias. En este punto existe una carencia casi absoluta de documentación y libros sobre el modelo de van Hiele en este entorno operativo.

El libro quiere empezar a cubrir las carencias de documentación y referencias sobre el modelo de van Hiele en España, y ser una herramienta para estudiantes de las Facultades de Educación, y profesores de todas las etapas educativas.

La tarea del docente de matemáticas es dura y complicada, y necesita una herramienta sencilla y eficaz que le ayude a determinar los niveles de sus estudiantes, de los contenidos curriculares, y de cómo proceder con unos y otros.

El éxito del modelo de van Hiele se ha fundamentado siempre en realidades objetivas y medibles, en su capacidad de predecir resultados, y en la sencillez de su esquema conceptual y de sus procedimientos, de la mano del conocimiento intuitivo y del sentido común en general, y de las matemáticas en particular. La generalidad y amplitud de los procedimientos basados en el modelo de van Hiele, van desde los diseños y desarrollos curriculares, a los trabajos en el aula día a día.

Para aportar una visión amplia y práctica del modelo de van Hiele en el sistema educativo español, el libro se divide en tres partes:

- Primeramente describe el modelo teórico de van Hiele, con las herramientas precisas para pasar a aplicarlo directamente al estudio de los alumnos, y a las actividades educativas.

- En la segunda parte da una visión de la enseñanza de la geometría en España en el marco del modelo de van Hiele. En este apartado se describe el estado curricular de la enseñanza de la geometría en España, y se aportan los métodos para extenderlo a cualquier materia, particularmente a la aritmética. Se analiza la actitud de los alumnos de Primaria, Secundaria, Bachillerato y de las Facultades de Educación, frente a la geometría; los niveles alcanzados por los alumnos frente a los que debieran haber llegado, así como el nivel de los futuros profesores de Primaria.

- Finalmente ofrece una perspectiva de la enseñanza de la geometría y de la Educación Primaria en España, frente a otros países. El modelo de van Hiele posee una metodología precisa para realizar comparaciones de los currícula de diferentes países, de los niveles alcanzados por los alumnos en España frente a otros países extranjeros, y de los niveles que tienen los profesores de Primaria en la comunidad internacional.

El modelo de van Hiele dispone también de una metodología precisa y eficiente para subsanar deficiencias producidas en el nivel de los alumnos por el sistema educativo. Herramientas para medir, determinar; predecir el crecimiento del nivel de los alumnos con respecto al currículum que trabajan; y analizar la eficacia en el crecimiento del nivel de los alumnos, y del sistema educativo.

Clemente Herrero Fabregat
Universidad Autónoma de Madrid