

## LA TORRE DE HANOI GENERALIZADA

En matemáticas muchos problemas que hoy en día entran en el curriculum de la educación primaria o obligatoria pueden ser ligeramente modificado dando luego a problemas muy complicados y de difícil resolución. Se puede pensar por ejemplo al conocido “Teorema de Pitagóras–Papus”<sup>1</sup>. Un caso especial muy conocido es el “Teorema de Pitagóras” que afirma que si  $(a, b, c)$  es una terna pitagórica entonces:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

De aquí es natural preguntarse si existen otras ternas  $(a, b, c)$  de números enteros positivos t.q.

$$c^n = a^n + b^n,$$

$n \in \mathbf{Z}, n > 2$ . Este problema, muy conocido como “El ultimo Teorema de Fermat”, ha sido solo recientemente resuelto<sup>2</sup>.

Aquí consideramos un problema parecido en algún sentido, el “Problema de la Torre de Hanoi generalizada”<sup>3</sup>.

El formado de la presentación sigue el estilo *de lo particular a lo general* para facilitar la puesta en practica por parte del profesorado en las aula en los distintos niveles educativos. El material será presentado con continuidad respecto a los distintos niveles educativos, desde la educación infantil hasta la educación superior y la investigación en matemática.

### La Torre de Hanoi.

Llamamos *Torre de Hanoi (clásica)* unos discos de radio creciente apilados en una de las tres varillas de un tablero. El objetivo es mover la pila en otra de las varillas en el menor número posible de pasos, siguiendo las reglas detalladas a continuación:

1. Sólo se puede mover un disco a la vez;
2. No puede haber nunca un disco de mayor tamaño o sobre uno de tamaño menor;

<sup>1</sup>Véase por ejemplo C.Madonna, El Teorema de Pitagóras–Papus, Didácticas Específicas, Vol.12 (2015).

<sup>2</sup>En el 1995 el matemático ingles Andrew Wiles publica una demostración de la no existencia de ternas  $(a, b, c)$  con estas propiedades.

<sup>3</sup>El problema clásico fue propuesto en el libro “De Subtilitate publicado” por el matemático italiano Girolamo Cardano (1501–1576), y luego fue introducido en el 1883 por el matemático francés François Edouard Anatole Lucas como juego.

3. Sólo se puede desplazar el disco que se encuentre arriba en cada varilla.

Por lo tanto el problema es el siguiente:

**Pregunta 1.** *Hallar el menor número de movimientos para mover los 3 discos de una varilla a otra con las reglas de arriba.*

Es fácil convencerse que la respuesta correcta en este es 7, y gráficamente se podría describir como en la Fig. 1<sup>4</sup>:

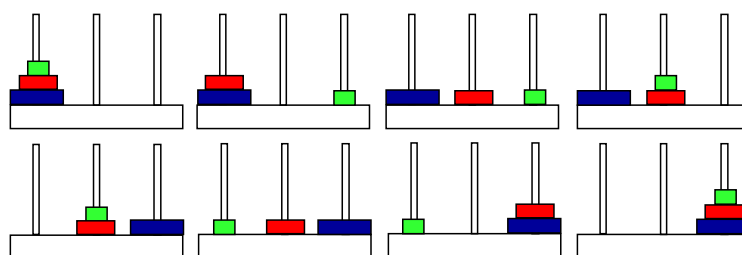


FIGURA 1. Secuencia de pasos para 3 discos: 7 pasos.

Este problema de muy fácil resolución ha sido objeto de numerosos estudios e diferentes aplicaciones en muchas otras ramas de conocimiento: en medicina, en psicología, en pedagogía ... aplicaciones que no vamos aquí a recordar visto que nuestro interés principal está centrado en un problema mucho más general, que tampoco en matemáticas ha sido resuelto hasta hoy, y de sus aplicaciones al ámbito de la formación y del desarrollo de las capacidades de razonamiento y pensamiento lógico-matemático.

La pregunta natural que nos podemos poner es la siguiente<sup>5</sup>:

**Pregunta 2.** *¿Y si en lugar de tres discos hay que mover  $n \geq 1$  discos<sup>6</sup>.*

<sup>4</sup>Esta actividad ofrecida a alumnos de Educación Infantil no ofrece ninguna dificultad y se puede adaptar en lugar de utilizar discos utilizando fichas geométricas de diferentes tamaños y formas, por ejemplo polígonos de 3, 4 o 5 lados. Es una actividad que no tiene un tiempo definido para ser terminada y el objetivo en la escuela infantil será enfocado más al razonamiento que al resultado. El objetivo fundamental es que los mismos estudiantes lleguen a proponerse la pregunta de encontrar el número mínimo de movimientos una vez resuelto el problema preparatorio que podría formularse de la siguiente manera: "Mover los tres discos de una varilla a otra siguiendo las reglas dadas". Se puede consultar el texto citado en la nota más abajo de A. Zvonkin para ver cuál podría ser el tiempo aconsejable para desarrollar esta actividad.

<sup>5</sup>En la escuela infantil y primaria se podrá presentar la pregunta con 4 o 5 fichas en lugar de pasar directamente al caso de un número arbitrario de fichas.

<sup>6</sup>Así se encuentra formulado el problema por ejemplo, cuando  $n = 3$ , en A. Zvonkin, *Math from Three to Seven. The Story of a Mathematical Circle for Preschoolers*, MSRI-AMS, 2011.

Para contestar a la pregunta 1 procedemos de la siguiente manera. Primero creamos una tabla de ayuda y vamos apuntando el número de movimientos en función del número de discos que tenemos, en algunos casos especiales, que luego nos servirán como ejemplos para encontrar una solución general para todos  $n \geq 1$ .

Con 1 disco está claro que el número de pasos que necesitamos es igual a 1. Para 2, y 4 discos, en las figuras Fig. 2 y Fig. 3 están representadas las secuencias de pasos a seguir, mientras que para 3 discos ya lo hemos visto en la Fig. 1.

# discos	# pasos
0	0
1	1
?	?
3	7
?	?

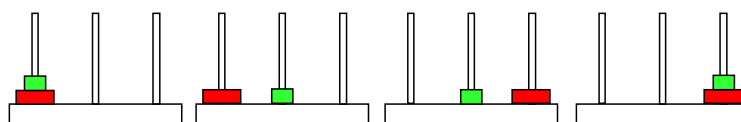


FIGURA 2. Secuencia de pasos con dos discos: 3 pasos.

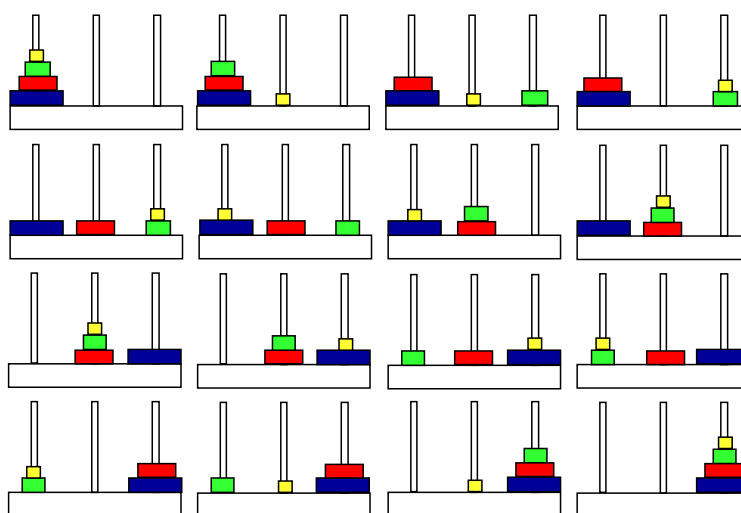


FIGURA 3. Secuencia de pasos con 4 discos

Si observamos como hemos conseguido mover los 3 discos del primer caso nos damos cuenta que hemos tenido que mover 2 discos desde una columna a otra, luego

mover el disco más grande en la posición final, y finalmente mover otra vez 2 discos en la varilla donde ya está el tercer disco. Para mover 2 discos hemos tenido que mover dos veces 1 disco de una varilla a otra más y mover el segundo disco en su posición final. Observamos también que si el número de movimientos para los 2 discos es el mínimo entonces también lo será para el caso de 3 discos.<sup>7</sup> Es decir, si denotamos a  $f(n)$  el número mínimo de movimientos para mover los  $n \geq 1$  discos en la varilla inicial con las reglas dadas, se puede observar que:

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 + 1 + 0 \\ f(2) &= 1 + 1 + 1 \\ f(3) &= 3 + 1 + 3 \\ f(4) &= 7 + 1 + 7 \\ &\dots \\ f(n) &= f(n-1) + 1 + f(n-1) \\ &= 2f(n-1) + 1 \end{aligned}$$

Sustituyendo en cada ecuación los valores obtenidos en la anterior y iterando conseguimos:

$$\begin{aligned} f(n) &= 2[2f(n-2) + 1] + 1 = 2(2[2f(n-3) + 1] + 1) + 1 \\ &= 2^3 f(n-3) + 4 + 2 + 1 = \dots \\ &= 2^{n-1} f(n - (n-1)) + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{(n-1)-1} \\ &= 2^{n-1} f(1) + 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-2} \\ &= 2^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} 2^k = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = \sum_{k=1}^{n-1} 2^k + 1 \end{aligned}$$

Resumiendo con un procedimiento recursivo<sup>8</sup> es fácil demostrar que:

$$f(n) = 2f(n-1) + 1 = \sum_{k=1}^{n-1} 2^k + 1, \quad f(1) = 1$$

<sup>7</sup>En la escuela infantil y primaria se podrá resaltar el razonamiento general: quitar todos los discos exceptuado el más grande, ponerlos en una sola varilla para poder mover el disco más grande en la posición final para luego volver a poner todos los demás discos encima de éste repitiendo el procedimiento hecho antes para quitarlos de la varilla inicial.

<sup>8</sup>Utilizando por ejemplo el Principio de Inducción Matemática, véase por ejemplo p.44: A.Barcia, P.Caressa, C.Madonna, *Matemática escolar desde un punto de vista superior, I: conjuntos y números*, Ediciones UAM, 2011.

Que por otro lado se puede escribir como

$$f(n) = 2^n - 1$$

$n \geq 1$ .

Ahora una pregunta natural podría ser la siguiente:

**Pregunta 3.** *¿Que pasa si hay 4 varillas en lugar de 3 y el problema es el mismo con las mismas reglas del caso de 3 varillas? ¿Y si hay  $k \geq 1$  varillas en lugar de 3 o 4 y  $n$  discos? Cual es el número mínimo de movimientos para mover los discos de una varilla a otra?*

Esto es lo que llamamos el “Problema de la Torre de Hanoi generalizado”.

### El problema de la Torre de Hanoi generalizado.

Para resolver el problema de la Torre de Hanoi generalizado tenemos que entender bien el método de resolución del problema de la Torre de Hanoi clásico.

Para contestar a la pregunta en el caso que haya  $k \geq 4$  varillas volvemos primero el caso anterior (clásico) de 3 varillas. El procedimiento para  $n$  discos y 3 varillas ha sido el siguiente:

*Mover los  $n - 1$  discos en una varilla libre para luego mover el disco más grande en la tercera varilla, y volver luego a poner otra vez los  $n - 1$  discos encima del disco más grande en la nueva varilla.*

Dicho eso, podemos abordar el primer caso más general de  $n$  discos en 4 varillas. Por ejemplo, en el caso de 4 discos, como en la siguiente figura

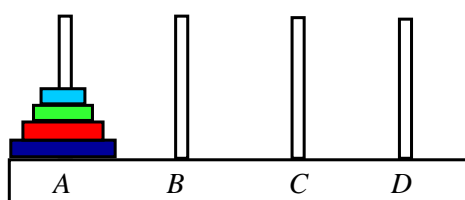


FIGURA 4. Torre de Hanoi con 4 discos y 4 varillas

siguiendo el idea del caso anterior de 3 varillas está claro que tenemos que sacar 3 discos de la posición inicial para poder mover el disco más grande en la varilla de la posición inicial a la final, distribuyendolos, con el número mínimo de movimientos, en las otras dos varillas libres.

En general si tenemos  $n \geq 1$  varillas para que todo eso sea posible, y con el mínimo número de movimientos, tenemos que distribuir los  $n - 1$  discos entre 2 varillas

fijadas entre las 4, con el número mínimo de movimientos. Denotamos este número con

$$g(n-1)$$

es decir el número de movimientos para distribuir  $n-1$  discos de la varilla inicial a 2 varillas fijadas teniendo en total 4 varillas.

Sean  $A, B, C, D$ , las 4 varillas, y supongamos que la posición inicial de los discos se la  $A$  y que la final tenga que ser la  $D$ . Por lo tanto  $g(n-1)$  es el número mínimo de movimientos necesarios para distribuir los  $n-1$  discos entre las varillas  $B$  y  $C$ .

Denotamos con

$$f_4(n)$$

el número mínimo de movimientos que necesitamos para mover los  $n$  discos de la posición inicial a la final en las 4 varillas y sea

$$f(n) := f_3(n).$$

**Conjetura 1.** *Bajo las notaciones de arriba:*

$$f_4(n) = 2g(n-1) + 1.$$

Es posible que la anterior conjetura sea fácil de demostrar utilizando el principio de inducción utilizando la minimalidad de los casos anteriores.

Por lo tanto, si la conjetura es cierta, para calcular  $f_4$  necesitamos simplemente explicitar  $g$ .

Para distribuir los  $n-1$  discos entre las  $B$  y  $C$  podemos elegir de dejar en una varilla

$$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

discos y en el otra

$$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1,$$

si  $n \equiv 0 \pmod{2}$  o bien  $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$  en ambas si  $n \equiv 1 \pmod{2}$ , por ejemplo.

Por lo tanto, sea

$$a = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

y sea

$$b = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \varepsilon$$

donde  $\varepsilon = 1$  si  $n \equiv 0 \pmod{2}$  y  $\varepsilon = 0$  si  $n \equiv 1 \pmod{2}$ .

Si el número de discos  $n$  es igual a  $n = 1, 2, 3$  entonces es fácil calcular que  $f_4(n) = 2n - 1$ . Si  $n \geq 4$  entonces se podría pensar que:

**Conjetura 2.**

$$g(n-1) = f_4(b) + f_3(a)$$

Recientemente se ha demostrado en un artículo publicado en el 2014 por Thierry Boush<sup>9</sup> que

$$\tilde{f}_4(n) = 2^{\delta_0} + 2^{\delta_1} + \dots + 2^{\delta_{n-1}}$$

donde  $\delta_k$  es el entero más grande  $p$  t.q.  $p(p+1)/2 \leq k$ , fórmula encontrada por Dudeney<sup>10</sup> primero y luego precisada por Frame y Stewart<sup>11</sup>. Como podemos ver en la siguiente tabla, la segunda conjetura es falsa!

$n$	$f_3(n)$	$f_4(n)$	$\tilde{f}_4(n)$
1	1	1	1
2	3	3	3
3	7	5	5
4	15	9	9
5	31	13	13
6	63	17	17
7	127	25	25
8	255	33	33
9	511	49	41
10	1023	57	49
11	2047	89	65

El problema es que la elección de distribuir los  $n - 1$  discos en dos varillas  $a$  en una y  $b$  en otro, no es la mejor! Por ejemplo, en el caso  $n = 9$  resulta mejor distribuir los 8 discos en 2 y 6 o 3 y 5 y el correspondiente número mínimo de movimientos es

$$g(9) = f_4(6) + f_4(2) = 17 + 3 = 20 = f_4(5) + f_3(3) = 13 + 7$$

mientras que cuando  $n = 10$  es mejor distribuir los 9 discos en 6 y 3 en lugar de 5 y 4 como hemos supuesto nosotros visto que

$$f_4(6) + f_3(3) = 17 + 7 = 24 < f_4(5) + f_3(4) = 13 + 15 = 28.$$

### Observaciones.

<sup>9</sup>Thierry Bousch, *La quatrième tour de Hanoi*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin 21 (2014), pp. 895-912

<sup>10</sup>H. E. Dudeney, *The Canterbury puzzles and other curious problems*, E. P. Dutton, New York (1908).

<sup>11</sup>J. S. Frame, *Solution to Advanced Problem 3918*, American Mathematical Monthly 48 (1941), 216-217; B. M. Stewart, *Advanced Problem 3918*, American Mathematical Monthly 46 (1939), page 363; B. M. Stewart, *Solution to Advanced Problem 3918*, American Mathematical Monthly 48 (1941), 217-219.

Como ya hemos observado, desde la educación infantil se puede proponer el problema de la Torre de Hanoi con 3 discos y 3 varillas como actividad para el desarrollo matemático de las habilidades de razonamiento lógico matemático de los niños, siguiendo por ejemplo pautas y objetivos como hemos indicado a lo largo del texto. Hemos visto también como luego se puede pasar al caso de  $n \geq 3$  discos en una torre de 3 varillas.

Por otro lado, también hemos visto como el solo pasar de 3 varillas a 4 varillas lleva a un problema que solo recientemente se ha conseguido resolver en una torre con 4 varillas, y con métodos no elementales, quedando todavía abierto el problema de establecer el número mínimo de movimientos necesarios en el caso de 5 o más varillas o también deducir una demostración elemental del caso de 4 varillas. El lector interesado puede consultar la amplia bibliografía (más de 300 artículos citados) redactada por Paul K. Stockmeyer<sup>12</sup> y otras referencias en Klavžar, Milutinović, y Petrb<sup>13</sup>.

De toda forma, resulta claro como la Torre de Hanoi (generalizada) puede ser muy útil en entornos educativos para introducir, por ejemplo:

1. El concepto de recursividad (o bien el Principio de Inducción Matemática);
2. Los problemas de optimizar y/o los problemas de mínimo;
3. Como resolver problemas y al mismo tiempo formular otros problemas;
4. Un ejemplo de lo que puede ser la investigación matemática.

En otra nota volveremos sobre otra interesante generalización de la Torre de Hanoi clásica.

Elena Benito Gonzalez<sup>14</sup>  
Carlo Giovanni Madonna<sup>15</sup>

---

<sup>12</sup>*The Tower of Hanoi: A Bibliography*, <http://www.cs.wm.edu/pkstoc/biblio2.pdf>

<sup>13</sup>*On the Frame–Stewart algorithm for the multi-peg Tower of Hanoi problem*, *Discrete Applied Mathematics* 120 (2002) 141–157

<sup>14</sup>[ele.benito@estudiante.uam.es](mailto:ele.benito@estudiante.uam.es)

<sup>15</sup>[carlo.madonna@uam.es](mailto:carlo.madonna@uam.es)