

## LA SUMA Y LA RESTA EN EDUCACIÓN INFANTIL

**Catalina M<sup>a</sup> Fernández Escalona**

Universidad de Málaga

**Nuria Domínguez Fernández**

Universidad de Granada

### RESUMEN

Se estudia el proceso que va desde las acciones reales y efectivas de añadir y quitar hasta la construcción de las operaciones aritméticas de suma y resta por parte de los escolares de 3, 4 y 5 años. El esquema lógico-matemático subyacente es el de transformaciones. Para que se den estas operaciones deben presentarse simultáneamente dicho esquema y la cuantificación, siendo esa simultaneidad la que lleva a las relaciones numéricas. Teniendo en cuenta que el origen de las operaciones de suma y resta en el escolar está supeditado a las acciones de añadir y quitar que se desarrollan en un proceso de construcción mental de los esquemas lógicos-matemáticos de transformaciones de cantidades discretas, se propone un plan de actuación en el aula de educación infantil mediante un tratamiento sistemático de dichas operaciones.

### PALABRAS CLAVE

Suma – resta - operaciones aritméticas - educación infantil - educación matemática.

### ABSTRACT

This study examines the process that spans from real and effective addition and deduction actions to constructing the arithmetic operations of adding and taking away in schoolchildren aged 3, 4 and 5. The underlying logical-mathematical model is that of transformations. For these operations to take place this model must be introduced at the same time as quantification, since it is this simultaneity that leads to numerical relationships. Bearing in mind that the inception of addition and subtraction operations in schoolchildren is subject to the actions of adding and taking away that are developed in a process of mental construction of the logical-mathematical models of transformations of discrete quantities, an early childhood classroom action plan is proposed using a systematic treatment of these operations.

### KEYWORDS

Addition – subtraction - arithmetic operations - early childhood education - mathematical education.

## 1. INTRODUCCIÓN

Existen transformaciones que cambian la cantidad frente a otras que la dejan invariante. Las primeras son las transformaciones cuantitativas y las segundas son las cualitativas. Cuando las cantidades que se están tratando son cantidades discretas esas transformaciones tienen un reflejo en las operaciones aritméticas. (Naito y Miura, 2001).

Los niños y niñas pequeños/as (menos de tres años) son capaces de actuar sobre los objetos reales (conchas, piedras, lápices, hojas, etc.) manipulándolos y realizando acciones que más tarde concluirán en la suma y la resta; se trata de la acción real y efectiva (Dickson, Brown y Gibson, 1991). El siguiente paso, es conseguir que los niños y niñas relaten las acciones que realizan, así van contando la acción al mismo tiempo que la ejecutan, es lo que Mialaret (1984) llama "acción acompañada de lenguaje". Con ello se consigue que: se adquieran términos básicos equivalentes a reunir-añadir, quitar-separar, diferencien unas acciones de otras, tomen conciencia del esquema de las transformaciones, sepan diferenciar las partes de un todo, etc., y en definitiva se den cuenta de todos los aspectos, a nivel de acción, que se ponen en funcionamiento al realizar una operación aritmética. A la edad de tres años los niños y niñas son capaces de contar lo que está sucediendo. (Vilette, 2002).

En este camino ascendente hacia la abstracción, nos encontramos que los niños y niñas de cuatro años son capaces de relatar una acción que sólo existe en su mente, que no se está realizando de forma efectiva, ya no se actúa sobre objetos concretos, es "la conducta del relato" (Hughes, 1981; Mialaret, 1984).

Finalmente, a los cinco años, los niños son capaces de comprender que una traducción simbólica del tipo  $3+2$  expresa una acción real, además, por conteo ascendente, pueden resolver problemas abstractos sin base concreta como por ejemplo: "¿Cuántos son tres más dos?" (Hughes, 1981).

En el periodo que abarca la Educación Infantil se dan los primeros encuentros del niño/a con la adición y la sustracción puesto que las acciones y transformaciones que dan lugar a estas dos operaciones son elementales y aparecen simultáneamente con el concepto de número.

Mediante la revisión de investigaciones en niños y niñas pequeños/as sobre la suma y la resta (Ginsburg y Pappas, 2004; Hughes, 1981; McCrink y Wynn, 2004; Naito y Miura, 2001; Robinson, 2001; Starkey y Gelman, 1982; Zur y Gelman, 2004) podemos asegurar que existen tareas apropiadas en las que estas operaciones parten de las acciones de añadir y quitar, siendo ésta la forma más adecuada para tratar los inicios de la aritmética en Educación Infantil.

## 2. EL PASO DE AÑADIR Y QUITAR A SUMAR Y RESTAR

Es un hecho constatado que los primeros encuentros del niño/a con la suma y la resta se realiza sin necesidad de una instrucción previa (Canobi, Revé y Pattison, 2003; Carpenter y Moser, 1979; Carpenter, Fennema et al, 1999; Dickson, Brown y Gibson, 1991). Estos contactos se realizan en un entorno cercano al niño/a; es por ello por lo que nos planteamos analizar

algunas situaciones familiares en las que aparecen las acciones de quitar o añadir y en base a ellas analizar la interiorización de las operaciones aritméticas de suma y resta (Fernández, 2001).

Las acciones de añadir o quitar objetos, a una colección dada, transforman la cantidad. Lo primero que queremos observar en los niños es si realmente ellos se percatan de este hecho en edades tempranas. En general, los niños de tres años, son capaces de observar, e incluso de decir, "hay más" o "hay menos" ante situaciones en las que se transforman la cantidad.

Una de las situaciones familiares trabajadas consistía en lo siguiente: la madre le prepara para desayunar al niño pequeño (de dos a tres años) una bandeja con 4 galletas y un vaso de leche. Esta situación se repite día tras día. Después de un tiempo, una mañana sólo aparecieron 3 galletas en lugar de las cuatro que venía siendo habitual; fué entonces cuando el niño pequeño advirtió que faltaba una (Fernández, 2007).

Aprovechamos esta situación para presentarle bandejas con tres galletas, él o ella decía que había tres (respuesta que daba por subitización). Cuando ya se tenía la certeza de que conocía el estado inicial y que lo podía retener en su memoria (esto ocurría día tras día preguntándole, varias veces y en distintos momentos, que cuántas galletas había en la bandeja), se realizaba la transformación que consistía en añadir una, y así llegamos al estado final que son cuatro galletas en la bandeja, el niño/a ante esta nueva situación decía que había una más.

Se repiten los ejercicios durante varios días. La madre ponía dos bandejas con tres galletas cada una. Él o ella las veía y decía que había lo mismo. Entonces a una de las bandejas se le añadía una más, y se le preguntaba qué era lo que había pasado, y decía que había puesto una. El hecho de poner dos bandejas con el mismo número era para que tuviese simultáneamente presente el estado inicial y final de la transformación, y con ello se perseguía que el niño/a se centrara en la acción, en este caso de añadir una galleta.

No obstante, en su quehacer diario los niños y niñas dan muestra inequívoca de que las acciones de quitar o añadir cambian la cantidad. Así, por ejemplo, si un niño/a está jugando con cochecitos y en su monólogo dice: "voy a por más" y acto seguido trae dos coches más que uno a su colección, prueba que este niño o niña es consciente de que la colección de objetos aumenta cuando se añaden nuevos elementos frente a la conducta de separar objetos para obtener más. Asimismo, si alguien le quita algún coche y el niño/a hace comentarios como éste: "dámelo porque ahora tengo pocos", estaremos ante un caso en el que sabe que si se quitan objetos de la colección la cantidad queda modificada para tener menos que antes.

En general, todos los niños y niñas investigados, a la edad de tres años, son capaces de decir "hay más" ante una situación en la que se añaden varios objetos a una colección de cinco elementos como máximo (si ponemos más de cinco objetos algunos niños/as de tres años dicen que hay muchos y cuando añadimos nuevos objetos, sigue habiendo muchos). Análogamente son capaces de decir "hay menos" cuando la situación se plantea quitando varios objetos de una colección dada.

Además los niños/as pequeños/as, son capaces de establecer la relación inversa entre las dos acciones. Saben que si quitamos un objeto de una colección, lo que debemos de hacer para tener el mismo número que al principio es añadir uno. Así, por ejemplo, cuando un niño o niña juega con coches, y la madre le quita uno, dice "dame el que me has quitado". Incluso en situaciones en las que el niño/a tenía los coches dispuestos en los cuatro vértices de una mesa cuadrada, se le quitaba uno y se le preguntaba ¿qué hacemos para tener lo mismo que antes?, respondía "poner uno más", y aún en un grado de abstracción mayor, si tenía cuatro galletas en una bandeja y la madre se comía una, a la vista de que quedaban tres galletas en la bandeja, le preguntaba que cuántas galletas se había comido y respondía que una; entonces ¿qué tenemos que hacer para tener el mismo número de galletas que al principio?, y el niño/a respondía que poner una.

Esta última situación, además de poner de manifiesto la relación inversa entre las acciones de añadir y quitar, indica que los niños y niñas de tres años pueden cuantificar el cambio cuando la diferencia es de uno. Así, si cambiamos tres galletas por dos, dicen: "falta una"; pero si cambiamos cinco por tres dicen "hay menos". Por lo tanto, los pequeños y pequeñas no cuantifican el cambio cuando la diferencia entre el estado inicial y el estado final de la transformación aritmética es más de uno.

## **2.1 ¿Cómo se recorre el camino hacia la cuantificación?**

Para Dickson y otros (1991), el paso previo hacia la cuantificación, y por tanto el inicio de las operaciones, es el principio de cardinalidad. Cuando el niño/a toma conciencia de que el proceso de recuento se puede usar para obtener el número de elementos de una colección, estará iniciando el camino adecuado para cuantificar el número de objetos que se añade o se quita a una colección dada; y esto, según los autores citados se da a la edad promedio de cuatro años y dos meses.

Pero las operaciones de sumar y restar conllevan algo más que el simple recuento de una colección de objetos. Bajo las acciones de añadir y quitar, subyace el esquema de transformaciones de cantidades discretas (Vergnaud, 1985); cuando se realiza una de estas acciones se tiene que recordar y pensar simultáneamente en: el estado inicial (lo que se tenía), la transformación (acciones de quitar o añadir) y el estado final (lo que se tiene ahora); y se da la circunstancia de que las tres secuencias de la transformación no se dan al mismo tiempo, por eso en la suma y la resta el niño/a tiene que hacer algo más que contar una colección de objetos. Así, por ejemplo, se le presenta tres caramelos, se guardan en una bolsa y le damos dos caramelos más en la mano; el niño/a, que efectivamente, tiene adquirido el principio de cardinalidad dice que hay 3 caramelos en la bolsa, y que después tiene 2 caramelos más en la mano; pero si no utiliza el esquema de transformación no es capaz de llegar a la operación de sumar, que requiere establecer una relación numérica entre los 3 caramelos de la bolsa y los 2 que tiene en la mano.

## 2.2 ¿Cómo se establecen las relaciones numéricas para cuantificar la acción?

Un indicio de que el niño/a empieza a establecer relaciones numéricas es cuando usa estrategias de recuento progresivo para cuantificar la acción. Cuando cuenta a partir de tres, dos unidades más, para determinar el número de caramelos que tiene, está estableciendo la relación que existe entre el cardinal 3 y el cardinal 2 atendiendo a la acción de añadir, y por tanto está sumando 3 y 2. Otra conducta menos evolucionada que la anterior, pero que indica el establecimiento de relaciones numéricas, es cuando se recurre al recuento completo de la nueva colección ayudándose de los dedos o de objetos materiales concretos.

Estamos en un momento de la investigación en el que se tiene adquirido el principio de cardinalidad, nuestro esfuerzo irá dirigido al establecimiento de relaciones numéricas, para ello trabajamos: El esquema de transformaciones de cantidades discretas.

Ello supone distinguir entre transformaciones que cambian la cantidad de aquellas que no la cambian, y que los niños y niñas sean capaces de describir y reconocer las tres partes de una transformación, esto es: Estado Inicial (E.I.), Transformación (T) y Estado Final (E.F.).

Cuando son capaces de relatar, por ejemplo, situaciones como éstas: "Tenía 3 caramelos (E.I.), tú me has dado 2 (T) y por eso tengo 5 caramelos (E.F.)", será la prueba inequívoca de que están estableciendo relaciones numéricas y que por tanto están cuantificando la acción de añadir.

Este tipo de relato lo consiguen los niños y niñas a una edad promedio de cuatro años y medio (Fernández, 2007). Debemos señalar que a la hora de describir la transformación anterior presentan fundamentalmente tres conductas, a saber:

- Conducta uno. Se describe una única secuencia: a) Estado Inicial (E.I.): "Antes tenía menos"; b) Estado final (E.F.): "Ahora tengo más"; c) Transformación (T): "Me has dado dos".
- Conducta dos. Se describen dos secuencias: a) Estado Inicial y Estado Final (E.I. y E.F.): "Antes tenía menos y ahora tengo más"; b) Transformación y Estado Final (T. y E.F.): "Me has dado dos y por eso ahora tengo más"; c) Estado Inicial y Transformación (E.I. y T): "Tenía menos y me has dado dos".
- Conducta tres. Se describe todo la transformación: Estado Inicial, Transformación y Estado Final (E.I., T. y E.F.): "Antes tenía menos tú me has dado dos y ahora tengo más", o bien "tengo más que antes porque tú me has dado dos".

En estas conductas se realiza una descripción cualitativa de las transformaciones, los niños y niñas saben que la cantidad ha variado, que el estado final supone una modificación de la cantidad de caramelos respecto del estado inicial lo que constituye un primer paso para llegar a cuantificar la acción.

Una vez que son capaces de realizar esas descripciones, el siguiente paso sería conseguir que pudieran describir todo el proceso de la transformación con la exigencia de que deben indicar cantidades concretas.

Cuando se describe toda la transformación: Estado Inicial, Transformación y Estado Final (E.I., T. y E.F.): "Tenía 3 y ahora tengo 5 porque me has dado 2", estamos en el caso de conducta más evolucionada y supone el éxito operatorio; en ella se llega a interiorizar de tal forma la acción que se consigue expresar los estados mediante números, lo cual indica el paso de las operaciones en sentido físico a las operaciones aritméticas (Fernández, 2007).

Para pasar de las descripciones cualitativas a las cuantitativas debemos trabajar con los niños y niñas estos interrogantes: ¿cuántos tenías al principio?, ¿cuántos tienes ahora?, ¿cuántos te he dado?, ¿cuánto más tienes ahora que antes?, con el fin de que se percaten de las tres secuencias de la transformación y de que establezcan relaciones numéricas.

Referente a la acción de quitar podemos seguir los mismos pasos. Debemos conseguir que describan toda la secuencia de la transformación donde, ahora, la acción en lugar de "añadir" es "quitar". Trabajamos, por tanto, situaciones como estas: "Nuria tenía 5 caramelos, se come 2 y ahora tiene 3 caramelos".

En las descripciones cualitativas se da una situación análoga a la anterior, en este sentido los niños/as dicen: "antes tenía más y ahora tengo menos", o bien "me he comido 2", ó "tengo menos porque me he comido 2". A la hora de hacer una descripción cuantitativa, hay niños/as que establecen correctamente la relación entre 3 y 5 cuando se trata de añadir dos y no así llegar del 5 al 3 quitando 2, y es que parece ser que en un principio el recuento progresivo es más fácil que el recuento regresivo.

Para ello se propone trabajar desde el principio la acción de quitar como inversa de la de añadir. Entonces cuando decimos "tienes 3 y añades 2, ¿cuántas tienes?", inmediatamente proponemos ¿qué tienes que hacer para tener las mismas que al principio?, con ello pretendemos que con la cuenta  $3+2=5$  se tenga además las cuentas  $5-3=2$  y  $5-2=3$  (Fernández, 2007).

### 3. TRATAMIENTO DIDÁCTICO DE LA SUMA Y LA RESTA

Hay modelos aditivos en los que no se da el esquema de transformaciones sino que subyace el esquema parte-parte-todo, como por ejemplo "Tengo 3 coches rojos y 2 verdes, ¿cuántos coches tengo?", dándose las acciones de reunir y separar.

Teniendo en cuenta los dos esquemas lógico matemáticos, junto a los tipos de acciones añadir-quitar y reunir-separar, y todo lo tratado anteriormente, proponemos que el tratamiento didáctico de la suma y la resta en Educación Infantil se realice atendiendo a 4 tareas tipo. Cada una de ellas conlleva estos esquemas:

- Acciones de añadir y quitar, que denominaremos como AQ
- Cuantificación de las acciones de añadir y quitar mediante el esquema de transformaciones, que denominaremos como T
- Acciones de reunir y separar que denominaremos como RS
- Cuantificación de las acciones de reunir-separar mediante el esquema parte-parte-todo que denominaremos como PPT

A su vez, cada uno de estos esquemas estará dividido en tres de este modo:

AQ

- ✓ Acciones de añadir, que denominaremos A
- ✓ Acciones de quitar, que denominaremos Q
- ✓ Acciones de añadir y quitar, que denominaremos A-Q

T

- ✓ Cuantificación de las acciones de añadir, que denominaremos TA
- ✓ Cuantificación de las acciones de quitar, que denominaremos TQ
- ✓ Cuantificación de las acciones de añadir y quitar, que denominaremos T(A-Q)

RS

- ✓ Acciones de reunir, que denominaremos R
- ✓ Acciones de separar, que denominaremos S
- ✓ Acciones de reunir y separar, que denominaremos R-S

PPT

- ✓ Cuantificación de las acciones de reunir, que denominaremos PPTR
- ✓ Cuantificación de las acciones de separar, que denominaremos PPTS
- ✓ Cuantificación de las acciones de reunir y separar, que denominaremos PPT(R-S)

Recogemos esto en la tabla siguiente:

Tabla 1. Tratamiento didáctico de suma y resta en 3, 4 y 5 años

Clases	3 años	4 años	5 años
	<b>AQ3:</b> <u>A3, Q3, (A-Q)3</u>	<b>AQ4:</b> <u>A4, Q4, (A-Q)4</u>	<b>AQ5:</b> <u>A5, Q5, (A-Q)5</u>
	<b>T3:</b> <u>TA3, TQ3, T(A-Q)3</u>	<b>T4:</b> <u>TA4, TQ4, T(A-Q)4</u>	<b>T5:</b> <u>TA5, TQ5, T(A-Q)5</u>
Tareas	<b>RS3:</b> <u>R3, S3, (R-S)3</u>	<b>RS4:</b> <u>R4, S4, (R-S)4</u>	<b>RS5:</b> <u>R5, S5, (R-S)5</u>
	<b>PPT3:</b> <u>PPTR3, PPTS3, PPT(R-S)3</u>	<b>PPT4:</b> <u>PPTR4, PPTS4, PPT(R-S)4</u>	<b>PPT5:</b> <u>PPTR5, PPTS5, PPT(R-S)5</u>

Acabamos de establecer una codificación de tareas que aclaramos a continuación: Una tarea cualquiera XYn, donde XY toma los valores AQ, T, RS y PPT y n los valores 3, 4 y 5, es la tarea que conlleva el esquema lógico-matemático XY para proponerla en la clase de 3 años, de 4 años ó de 5 años. Así por ejemplo AQ3 es la tarea propuesta para el tratamiento didáctico de “Acciones de Añadir y Quitar” en niños de 3 años.

Llamaremos Tarea XYn (con XY variando entre los valores AQ, T, RS y PPT, y n toma los valores 3 años, 4 años ó 5 años) a un conjunto de actividades que conlleva el esquema lógico-matemático XY adecuadas para la clase de n años.

Para cada tarea haremos lo siguiente: presentación que conlleva sistemáticamente 3 actividades (por ejemplo, para la tarea AQ3, las tres actividades son: acciones de añadir A3, acciones de quitar Q3 y acciones de añadir y quitar (A-Q)3); análisis operatorio que consiste en analizar las competencias lógico-matemáticas implicadas en la realización de la actividad; y

por último, para los esquemas implicados surgidos del análisis operatorio, se planteará una situación didáctica. Todo esto se recoge en la figura 1.

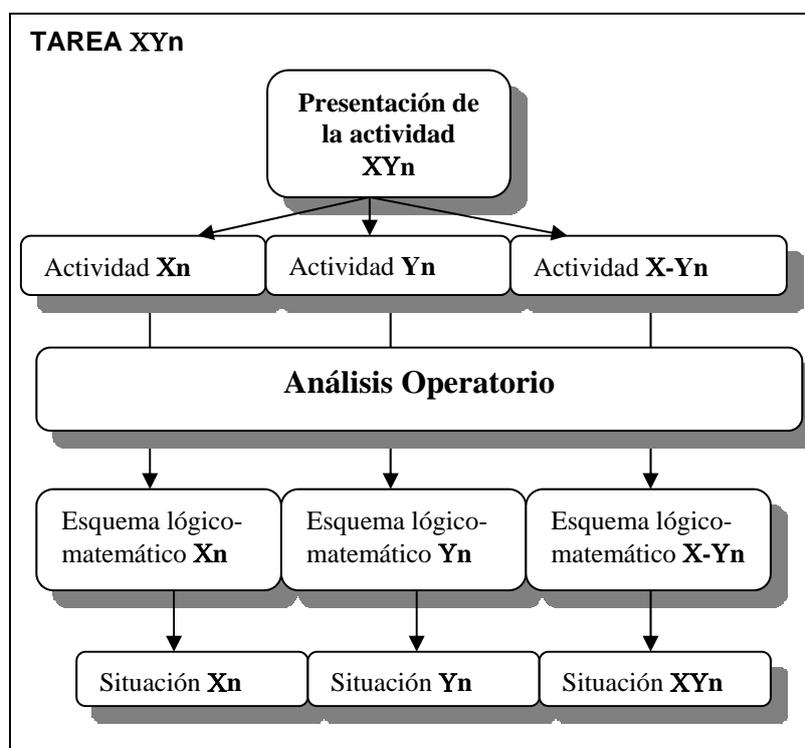


Figura 1. Actuación en el Aula de Educación Infantil en el tratamiento didáctico de suma y resta.

Por ejemplo, para la cuantificación de las acciones de añadir y quitar en 3 años quedaría así:

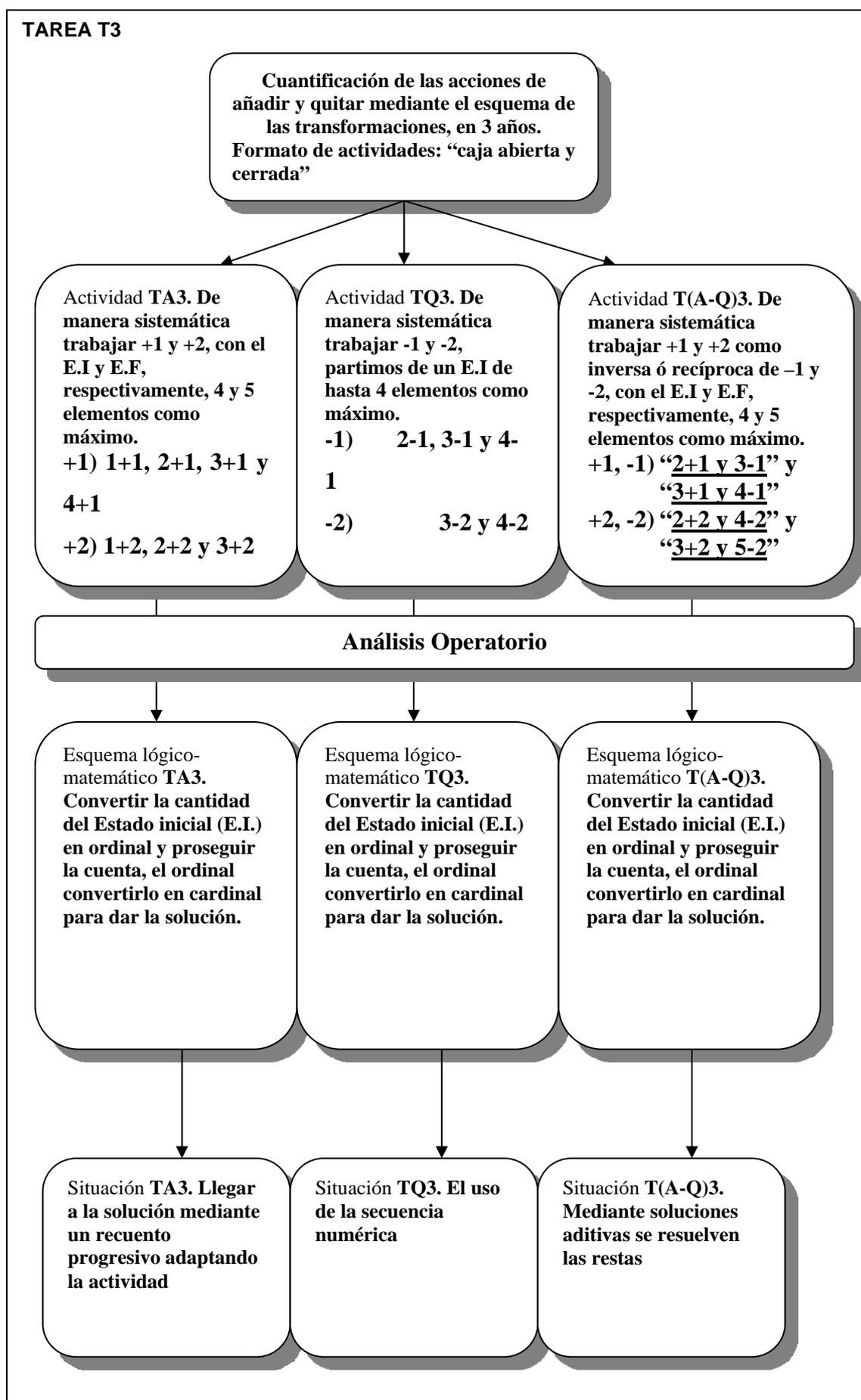


Figura 2. Tarea para la cuantificación de las acciones de añadir y quitar en 3 años

El modelo de la figura 1 se aplica, para las acciones de añadir y quitar y la cuantificación mediante el esquema de transformaciones, en la clase de 3, 4 y 5 años atendiendo a las siguientes pautas:

- ✓ En la clase de 3 años se trabaja las acciones de añadir y quitar provocando la acción, por eso se le dice al niño “coge más”, “quita algunas”. Para la cuantificación de estas acciones se realiza de manera sistemática añadiendo uno con el esquema de transformaciones y con el formato “caja abierta-caja cerrada” (Hughes, 1981) o lo que es lo mismo “acción real” (Mialaret, 1984).
- ✓ En la clase de 4 años se trabaja las acciones de añadir y quitar sin provocar la acción, por eso se le dice al niño “¿qué tienes que hacer para tener más? y para tener menos” Para la cuantificación de estas acciones se realiza de manera sistemática añadiendo 2, 3 ó 4 con el esquema de transformaciones y con el formato “caja cerrada-caja hipotética” (Hughes, 1981) o lo que es lo mismo “acción real y conducta del relato” (Mialaret, 1984).
- ✓ En la clase de 5 años se trabaja las acciones de añadir y quitar mediante un relato, sin objetos tangibles. Para la cuantificación de estas acciones se realiza de manera sistemática trabajando los dobles, los dobles más uno con el esquema de transformaciones y con el formato “caja hipotética- código formal” (Hughes, 1981) o lo que es lo mismo “conducta del relato-representación simbólica” (Mialaret, 1984).

#### 4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Canobi, K. Reeve, R. & Pattison, P. (2003). Patterns of Knowledge in Children's Addition. *Developmental Psychology*, 39 (3), 21-34.
- Canobi, K.(2004). Individual Differences in Children's Addition and Subtraction Knowledge. *Cognitive Development*, 19 (1), 81-93.
- Carpenter, T.P. & Moser, J.M. (1979). An investigation of de learning of addition and subtraction. Madison: Wisconsin Research and Development Center for Individualized Schooling.
- Carpenter, T:P. Fennema, E. et al (1999). *Children's Mathematics*. Cognitively Guided Instruction. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Dickson, L., Brown, M. & Gibson. O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Cerdanyola: Editorial Labor, S.A.
- Fernandez, C. (2001). Aprendizajes numéricos en el ámbito familiar. En A. Gervilla, M. Barreales, R. Galante & I. Martinez, (Eds), *Familia y Educación* (pp. 339-348). Málaga: HUM 205.
- Fernández, C. (2007). ¿Cómo y cuándo abordar la didáctica de las operaciones de suma y resta?. *Bordón*, 59(1), 63-80
- Ginsburg, H. & Pappas, S. (2004). SES, Ethnic, and Gender Differences in Young Children's Informal Addition and Subtraction: A Clinical Interview Investigation. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 25 (2), 171-192
- Hughes, M. (1981). Can Pre-School Children Add and Subtract?. *Educational Psychology*, 1(3), 207-219.
- Mccrink, K. & Wynn, K. (2004). Large, number addition and subtraction by 9-month-old infants. *Psychological Science*, 15, 776-781.
- Mialaret, G. (1984). *Las Matemáticas cómo se aprenden, cómo se enseñan*. Madrid: Aprendizaje Visor
- Naito, M. & Miura, H. (2001). Japanese Children's Numerical Competencies: Age- and Schooling-Related Influences on the Development of Number Concepts and Addition Skills. *Developmental Psychology*, 37 (2), 17-30.
- Robinson, K. (2001). The Validity of Verbal Reports in Children's Subtraction. *Journal of Educational Psychology*.93 (1), 211-222
- Starkey, P. & Gelman, R. (1982). The development of addition and subtraction abilities prior to formal schooling in arithmetic. En T. Carpenter, J. Moser & T. Romberg (Eds). *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. (pp.99-116). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Vergnaud, G. (1985). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. New York: Peter Lang.
- Vilette, B. (2002). Do young children grasp the inverse relationship between addition and subtraction? Evidence against early arithmetic. *Cognitive Development*, 17, 1365-1383

Zur, O. & Gelman, R. (2004). Young Children Can Add and Subtract by Predicting and Checking. *Early Childhood Research Quarterly*, 19 (1), 121-137.

\*\*\*\*\*