

Las matemáticas: fundamento de un desarrollo equilibrado

Introducción

Antonio Corral

EN una biografía de Maimónides se nos dice que este sabio «creía que el que desease alcanzar la perfección humana debía estudiar en primer término, como instrumento indispensable, la lógica; y luego, por este orden, las ciencias matemáticas, las ciencias naturales y, por último, la metafísica (...). El objetivo de Maimónides al estudiar álgebra y geometría era aguzar el pensamiento y adiestrar el entendimiento». (A. J. Heschel, 1982/1984, pp. 34 y 35).

Las ideas que me propongo sugerir aquí no están muy lejos de las propuestas por Maimónides hace 8 siglos. Efectivamente, las matemáticas, y las disciplinas lógico-formales, en general, constituyen la piedra angular de todo pensamiento fecundo, pues sólo ellas pueden proporcionar rigor, claridad y disciplina a nuestro borroso pensamiento. Sin esta «ascesis intelectual» nuestra inteligencia fácilmente se vence hacia lo fácil, lo inmediato, la pura opinión o la mera arbitrariedad. El analfabetismo matemático es caldo de cultivo de toda suerte de dominación cultural y política. (J. A. Paulos, 1988/1990).

No puede haber verdadero progreso en ningún campo del conocimiento sin una adecuada *compleción* matemática.

Incluso, en el campo de la novelística del siglo XX, autores tan excepcionales como Her-

mann Brock o Robert Musil (por no citar más que a dos) dedicaron mucho tiempo y esfuerzo al estudio de las matemáticas. Y, de un modo muy significativo, Italo Calvino, resumía sus *Seis propuestas para el milenio* (1989) con los siguientes vocablos: levedad, rapidez, *exactitud*, visibilidad, multiplicidad y *consistencia*.

Las matemáticas son la espina dorsal, la columna vertebral, la piedra angular, el instrumento *sine qua non*, del verdadero progreso intelectual, tanto individual como colectivo. Son para el desarrollo intelectual lo que la ascesis es para el contemplativo. Son la luz del pensamiento.

Siendo, como es, esto así, no es de extrañar que la *clave* del proceso educativo, lo que distingue un sistema educativo fallido de otro que cumple sus objetivos con éxito, es, precisamente, la probada adquisición de los estudiantes de un pensamiento matemático equilibrado, lo cual requiere que los educandos no sólo den muestras de haberse apropiado de los procedimientos, algoritmos, formulaciones o automatismos: cristalizaciones, en suma, sino también de haber adquirido la *capacidad de plantearse problemas, interrogaciones, hacer uso de*

heurísticos personales, de atestiguar, en definitiva, un pensamiento fluido o creativo. El cumplimiento de este mandato educativo es difícilísimo.

Pocos sistemas educativos podrán alardear de haberlo conseguido. Pero, no debemos olvidar, que los procesos de enseñanza/aprendizaje, en general, están regidos por leyes naturales, cuyo conocimiento nos abrirán las puertas del éxito. No creo que sea una exageración decir que el logro de una teoría psicológica de la educación matemática, entendida ésta en un sentido pleno —no el mero adiestramiento, entrenamiento o instrucción—, conllevaría, *ipso facto*, la posibilidad de una generalización, *enormemente facilitadora*, a las otras disciplinas didácticas de los conocimientos obtenidos en el estudio de la enseñanza de las matemáticas. ¿Y, esto, por qué?

Pues, sencillamente, porque al ser la educación matemática el problema más difícil, es lógico esperar, que la solución del problema más difícil suponga la solución de los que lo son en menor medida, ya sea porque se los puede considerar un caso particular de aquél, o, porque implican un mero desarrollo o especificación del problema más general.

En estos momentos estamos en disposición de enumerar los aspectos implicados en el proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, cuyo adecuado dominio e *interconexión* nos conducirá a la comprensión de los complejos mecanismos que subyacen a este proceso.

- 1.- El desarrollo de las operaciones lógico-matemáticas generales de conocimiento.
- 2.- El estado actual de conocimientos de carácter específico.
- 3.- El conocimiento del desarrollo histórico de los conceptos fundamentales: resistencias y detenciones.

- 4.- El conocimiento de los problemas filosóficos y epistemológicos de las matemáticas.
- 5.- El conocimiento de los errores de carácter universal y su vinculación con las situaciones engañosas.
- 6.- Las diferencias individuales en lo que se refiere a los distintos estilos cognitivos (reflexividad/impulsividad; dependencia-independencia del campo perceptivo) y su relación con los estilos «matemáticos» (analistas y geómetras; intuicionistas y formalistas).
- 7.- Los problemas de la motivación derivados de la dificultad de superar la *apariencia* de que las matemáticas son una disciplina alejada de la realidad, dado su fuerte componente de abstracción.

A continuación, vamos a comentar cada uno de los aspectos o notas que hemos enumerado previamente. Y al final presentaremos una síntesis (posible) de ellos.

1. El desarrollo de las operaciones lógico-matemáticas generales de conocimiento

NUMEROSOS estudios han intentado relacionar la teoría piagetiana con la enseñanza de las ciencias, en general, y con la de las matemáticas, en particular. De singular interés resulta la conexión de la teoría piagetiana de las operaciones lógico-formales (Inhelder y Piaget, 1955) con la enseñanza de las matemáticas. En un experimento llevado a cabo por el autor (Corral y Tejero, 1986) se pudo comprobar que aquéllos alumnos de COU que habían acreditado un nivel de desarrollo lógico-

formal pleno (combinatoria, esquema de control de variables, grupo INRC probabilístico y físico) obtenían las máximas puntuaciones en la resolución de problemas de un tema de matemáticas estándar: La Combinatoria (variaciones, permutaciones y combinaciones). Todos los demás, no alcanzaban, ni mucho menos, las puntuaciones de aquéllos. La preocupación surge cuando se ve que en un nivel formal completo sólo se encuentran el 20% de los sujetos. Obsérvese, además, que el ítem con el que se valoraba el nivel lógico-formal en el esquema de combinatoria, fue resuelto por el 100% de los sujetos. Esto quiere decir que todos los alumnos en materia de razonamiento combinatorio partían con el mismo nivel, por lo que estos resultados no se explican invocando la influencia de los conocimientos previos, pues, en este caso, no parecía que hubiera diferencias entre los sujetos.

Lo primero que cabría concluir de este experimento es la necesidad de fomentar el desarrollo de operaciones generales de procesamiento, o, dicho de otro modo, del pensamiento lógico-formal, si se quiere optimizar la asimilación de conceptos matemáticos: son los sujetos que demuestran estar en un estadio formal avanzado o completo quienes tienen un comportamiento escolar casi óptimo. Ahora bien, esto no quiere decir que haya que enseñar el pensamiento formal directamente. Sólo intentarlo, ya sería un error de graves consecuencias. ¿Por qué? Precisamente porque el pensamiento formal no es, primordialmente, un conjunto de estrategias potentes para resolver problemas particulares, sino un modo distinto de enfrentarse con la realidad, que conduce, posteriormente, a la construcción por parte del sujeto de esas estrategias cuando interactúa con la realidad y comprueba que las que actualiza no le garantizan el éxito siempre. Si el pensamiento formal fue-

ra simplemente un conjunto de esquemas para resolver problemas concretos, si tendría sentido intentar su enseñanza directa, pero no es éste el caso. Por lo tanto, lo que procede, por parte del sistema educativo, es facilitar al estudiante los estímulos suficientes para que pueda ir construyendo por sí mismo esas operaciones generales de procesamiento.

Por otra parte, en otro lugar, ya hemos señalado las dificultades que tiene la enseñanza directa del razonamiento proporcional (Corral, 1986 y 1987).

2. El estado actual de conocimientos de carácter específico

LA teoría de Ausubel (1968) considera que la capacidad para resolver problemas depende de la adecuación de los conceptos específicamente relevantes en la estructura cognitiva del que aprende. Novak (1977) afirma que sólo cuando ya existe algún concepto rudimentario relevante para el material nuevo el aprendizaje es significativo.

Lo que se aprende es función, fundamentalmente, de lo que ya se sabe.

Hemos podido comprobar (Tejero y Corral, 1987) cómo los conocimientos previos con los que llegaban los alumnos, en este caso con respecto a la asignatura de Álgebra lineal (asignatura del primer ciclo de universidad), eran decisivos a la hora de aprobar o no la asignatura.

Los autores del trabajo extrajeron, después de analizar el libro de texto de la asignatura, un conjunto de 17 ítems que versan sobre conocimientos que el autor-profesor da por sabidos o supuestos, y, que, por tanto, están indicados de un modo latente o implícito.

Los alumnos contestaron la prueba de conocimientos previos al comienzo de curso. El análisis de los resultados se hizo después de calificar a los alumnos en la prueba de septiembre. El profesor, cuando calificó, no conocía las contestaciones de los alumnos a la prueba de conocimientos previos.

Los resultados no pueden ser más contundentes.

Si el alumno alcanza una puntuación por encima del 50% de aciertos en la prueba de conocimientos previos pasa la asignatura en junio o en septiembre.

No hay ningún alumno que teniendo menos del 50% de aciertos apruebe alguno de los dos parciales de la asignatura.

3. El conocimiento del desarrollo histórico de los conceptos fundamentales: resistencias, fijaciones y detenciones

UNO de los problemas que impiden el progreso del conocimiento es la fijación o centración en una determinada composición (estructura) perceptivo-mental de la realidad. Esto impide la necesaria descentración que, según Piaget —entre otros—, consiste en reestructurar de nuevo el campo perceptivo-mental, des-unir todas las partes o elementos —liberarlas de esa fijación— para volverlos a relacionar y a estructurar de otro modo, un modo superior (re-centración). Ello requiere, según Pascual-Leone, un nivel de activación, de consumo de energía, de acción y de tensión mental enorme. Esto explicaría la tendencia al «sedentarismo» inte-

lectual de la mayoría de las personas y la dificultad del avance científico.

Veamos algún notable ejemplo histórico.

La geometría analítica nació, con Descartes, en la primera mitad del siglo XVII, con el fin de relacionar las curvas del plano y las ecuaciones algebraicas con dos incógnitas. Descartes deseaba un método general de resolución, que pudiera aplicarse a todos los problemas de la geometría. Los dos conceptos fundamentales aportados por Descartes fueron:

(1) el concepto de coordenadas, abscisa y ordenada, a partir de un origen (0,0)

(2) la representación en forma de curva plana de cualquier ecuación algebraica con dos incógnitas, valiéndose para ello del método de las coordenadas (Aleksandrov et al., 1979).

Con la introducción de las coordenadas, Descartes «aritmetizó» el plano. En lugar de determinar un punto geoméricamente, basta con dar un par de números (x,y) y viceversa. Antes de Descartes se consideraba que una ecuación algebraica con dos incógnitas, $F(x,y)=0$, era un problema indeterminado, y, se estimaba que una ecuación tal, «indeterminada», carecía de interés (FIJACIÓN). Descartes consideró la situación desde un ángulo diferente (DES-CENTRACIÓN). Propuso que la x fuese considerada como la abscisa de un punto, y la correspondiente y como su ordenada. Si se dan distintos valores a x y, para cada valor de x , se calcula la correspondiente y en la ecuación, se obtiene en general un conjunto de puntos que constituye una curva (RE-CENTRACIÓN). Esta observación de Descartes abrió las puertas a una ciencia enteramente nueva. Descartes necesitó un movimiento de des-centración/re-centración para lograrlo: transformar los problemas geométricos en problemas aritméticos.

¿Qué es lo que hace que se produzca una des-centración/re-centración? ¿Cómo surge ese «movimiento mental»?

La mente ve un problema: algo sucede para lo que no hay, todavía, explicación, y hay que buscar una explicación. Ese deseo termina almacenándose en el repertorio «meta-ejecutivo» del sujeto. Este deseo, unas veces de un modo inconsciente y otras conscientemente activado, es el motor de la actividad mental y gobierna la atención. Es la energía de búsqueda.

Para alcanzar el éxito se requiere que pensadores anteriores hayan desbrozado el camino y hecho aportaciones previas. El último estadio del proceso es una reorganización de los elementos ya conocidos; se necesita un esquema ejecutivo que coloca cada cosa en su sitio. Si bien en el último estadio también puede aparecer algún elemento nuevo que no estaba presente previamente, fundamentalmente, es una recapitulación, una explicitación, una extracción de las últimas consecuencias de toda la historia anterior. Es «sólo» el último paso de un largo camino colectivo. Pero es necesario que se produzca ese movimiento de descentración-recentración. El enigma radica en qué momento y por qué se produce ese movimiento.

En todo acto creativo hay algo de intuición. La intuición no está mediada por el lenguaje, ni por la limitación del paso a paso o la sucesión de etapas, como el pensamiento lógico-formal. Eso le permite ensayar muchas posibilidades a una gran velocidad, hasta que encuentra una que le satisface desde el punto de vista del presente, y, también, quizás, desde el punto de vista del futuro, porque puede prever todas sus posibilidades de desarrollo.

Poincaré y Hadamard explican la iluminación como el resultado de un período de incubación donde

trabaja el inconsciente ocupándose de varias cosas a la vez, edificando numerosas combinaciones de ideas, clasificándolas e iluminando, así, la inteligencia consciente. Desde este punto de vista, el inconsciente nos impediría cometer muchos errores, al impedir que desechemos combinaciones o posibilidades que el intelecto consciente considera absurdas (Leray, 1979).

En su libro *Ciencia y método*, Poincaré relata uno de sus descubrimientos matemáticos. A costa de un extraordinario esfuerzo, había logrado construir algunas de las llamadas funciones fuchsianas, que constituyen las funciones automorfas más simples y más útiles, mediante un procedimiento de construcción. Pero este procedimiento no podía adaptarlo a la construcción de todas las funciones fuchsianas porque no disponía de un marco teórico cómodo e intuitivo al que referirlo. Este suponía, precisamente, una geometría no euclidiana, que por un prejuicio milenario (resistencias) estaba excluido por principio. Poincaré no lo percibe en tanto su espíritu queda *fijado* (fijación) en los resultados adquiridos; pero, un viaje lo distrae de sus investigaciones; de improviso e instantáneamente lo invade la certeza absoluta de que ha manejado la geometría no euclidiana (descentración), y, que esta geometría constituye el instrumento más adecuado para las funciones fuchsianas (recentración).

Parece ser, pues, que el inconsciente y la intuición juegan un papel nada desdeñable en el mecanismo de descentración-recentración, necesario para superar estados de conocimiento incompletos o erróneos.

Fisher y Lipson (1985) creen, al igual que muchos otros autores, que los errores más persistentes reflejan o bien conocimientos previos muy formados o atributos comunes de mecanismos de proce-

samiento de la información espontáneos y subconscientes: preconceptos, conceptos erróneos, conceptos primitivos e ingenuos, lapsus... Los humanos exhiben una justa tendencia a evitar esfuerzos extra de tipo mental, así como a minimizar la cantidad de procesamiento y a ahorrar sus recursos atencionales. Esta tendencia lleva, a menudo, a prestar atención a los aspectos superficiales de la situación, más que a los aspectos de la estructura profunda. Por lo tanto, hay que plantear problemas y discusiones que re-dirijan la atención hacia los aspectos profundos del problema, si queremos facilitar el mecanismo de descentración-recentración, imprescindible para el progreso cognoscitivo.

Aunque el método de comparar el desarrollo histórico de algún núcleo del currículum matemático con el desarrollo ontogenético es muy sugestivo, no siempre los resultados son prometedores. Este fue lo que ocurrió cuando indagamos (Tejero y Corral, 1988) qué tipo de demostración utilizarían, espontáneamente, 28 alumnos de COU cuando se les pidiera que demostraran que *los tres ángulos de un triángulo suman un ángulo llano*.

Hay dos formas, desde el punto de vista geométrico, de hacerlo. Una, la que se atribuye a Pitágoras, más primitiva, y, otra posterior, de Euclides.

Sólo un alumno (alumna, y, en el sentido que se atribuye a Pitágoras) realizó la demostración. La gran mayoría utilizó complejas y farragosas pseudodemostraciones que no conducían a ninguna parte. Los errores más habituales son los siguientes:

- Razonamiento circular o petición de principio: utilizan la tesis (el teorema) que tienen que demostrar como demostración de la tesis.

- Utilizan para demostrar el teorema, triángulos rectángulos o isósceles, porque les parece que en esos casos particulares la evidencia del teorema es

inmediata. No entienden que el teorema implica cualquier triángulo.

- Utilización abusiva de fórmulas trigonométricas. Teoremas del seno, coseno, el producto escalar...

Resultados como éstos, por desgracia muy comunes, ponen de manifiesto, que si bien los alumnos de COU muestran grandes capacidades algorítmicas, las utilizan de forma ciega. No disponen de heurísticos para enfrentarse con situaciones abiertas, ni de habilidades para encarar los problemas de un modo elegante y sencillo, evitando de este modo las complicaciones innecesarias. Nuestros alumnos han empleado instrumentos matemáticos mucho más complejos que el teorema que debían demostrar, y, sin embargo, han fracasado. La mente algorítmica de la mayoría de nuestros estudiantes de matemáticas está oscurecida: urge su esclarecimiento.

4. Los problemas epistemológicos y filosóficos de las matemáticas

L *A nueva mente del emperador* (Penrose, 1989/1991), es un *síntoma* de la insatisfacción que provoca en amplios sectores del quehacer científico el vigente marco epistemológico, y, una *manifestación* de las dificultades que entraña la formulación de un nuevo «paradigma epistemológico».

¿De dónde nace esa insatisfacción con el enfoque filosófico al uso? ¿De dónde proviene el deseo de cambiar los fundamentos filosóficos de nuestro «sistema de conocimiento»? ¿Cuál es la clave que orienta la nueva reflexión epistemológica?

Creo que Penrose, independientemente de las insuficiencias de las que hace gala en los capítulos 9 y 10 de su libro, ha acertado a señalar el punto central de la maraña. El ha visto muy bien dos tipos de situaciones:

- (a) Las situaciones científicas *inesperadas* y
- (b) Las situaciones científicas *anómalas*

que, a mi modo de ver, son las causantes de esta intranquilidad metafísica que se observa en el mundo de la ciencia.

Por situaciones científicas inesperadas entiendo un pequeño número de resultados teóricos, tanto en las ciencias formales como en las experimentales, que han dado al traste con ciertos prejuicios «ontológicos» clásicos. ¿Cuáles son éstos?

1. Cantor (1845-1918) descubre que el conjunto R de todos los números reales no puede ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto N de todos los números naturales. El conjunto R no es numerable. Eso significa que existen conjuntos mucho más numerosos que N , conjuntos que no podrían ser contados o enumerados por medio de números naturales utilizados como índices (Dauben, 1980/1984).

2. La probada incompletitud de los sistemas formales a cargo de Gödel (*Sobre las proposiciones formalmente indecidibles de los Principia Mathematica y sistemas afines*) que acabó con un viejo sueño «axiomático». Se admitía, tácitamente, que todos los sectores de la matemática podían ser dotados de unos conjuntos de axiomas susceptibles de desarrollar sistemáticamente la infinita totalidad de proposiciones verdaderas suscitadas en el campo sujeto a investigación. El trabajo de Gödel demostró que esta suposición es insostenible. El método axiomático tiene limitaciones intrínsecas. La aritmética ordinaria de los números enteros no puede ser plenamente

axiomatizada. Es imposible establecer la consistencia lógica interna de una amplia clase de sistemas deductivos (la aritmética elemental, p.e.), a menos que se adopten principios tan complejos de razonamiento que su consistencia interna quede tan sujeta a la duda como la de los propios sistemas. No puede garantizarse completamente el que muchas ramas de las matemáticas se hallen enteramente libres de toda contradicción interna (Nagel y Newman, 1958/1979).

3. La imposibilidad de definir un estado de simultaneidad absoluta, dada la injustificable pretensión de Newton de postular la existencia de un tiempo y un espacio absolutos.

«La teoría de la relatividad de Einstein acabó con la idea de un tiempo absoluto. Cada observador debe tener su propia medida del tiempo, que es la que registraría un reloj que se mueve junto a él, y relojes idénticos moviéndose con observadores diferentes no tendrían por qué coincidir» (Hawking, 1988/1990). Ahora lo absoluto son las leyes, expresadas matemáticamente, que relacionan las cuatro variables espaciotemporales, en un único sistema.

4. El comportamiento dual de la luz, que se manifiesta ora como *onda* ora como *partícula*.

5. El principio de indeterminación de Heisenberg (1926): «cuanto con mayor precisión se trate de medir la posición de una partícula, con menor exactitud se podrá medir su velocidad, y viceversa. Además esto no depende de la forma en que uno trata de medir la posición o la velocidad de la partícula, o del tipo de partícula, el principio de incertidumbre es una propiedad fundamental, ineludible, del mundo» (Hawking, 88/90).

Por situaciones científicas anómalas entiendo un conjunto de *resistencias* teóricas que no se logra superar. Significan, además, lugares de paso inexcusables para un decidido avance científico posterior.

De ahí su relevancia epistemológica.

1. Las conjeturas en la Teoría de números.

Por ejemplo, la conjetura de Goldbach: «cada entero par (>2) es la suma de dos primos»;

la conjetura de que «existen infinitos pares de primos, tales como 3,5 y 17,19 cuya diferencia es 2»;

«si existen números impares perfectos es un problema no resuelto»¹.

La conjetura de Fermat «es imposible escribir un cubo como suma de dos cubos, una cuarta potencia como suma de dos cuartas potencias y, en general, cualquier potencia superior a la segunda como suma de dos potencias similares». [$x^n + y^n = z^n$]

Catalan conjeturó que la única solución de la ecuación $x^p - y^q = 1$ con enteros x, y, p, q todos >1 , está dada por $3^2 - 2^3 = 1$. La conjetura todavía no ha sido establecida (Baker, 1984/1986).

2. La teoría general de la relatividad lleva a tener que admitir una singularidad infinita donde, inevitablemente, no se puede aplicar la teoría.

3. Se asume por los teóricos de la física que la teoría general de la relatividad y la mecánica cuántica tienen postulados incompatibles.

4. No se ha conseguido una teoría unificada que ligue simultáneamente las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza: gravitatoria, electro-magnética, nuclear fuerte y nuclear débil.

5. Las ecuaciones cuánticas son deterministas, pero cuando se amplifican los efectos cuánticos hasta el nivel clásico se introducen incertidumbres y probabilidades en la teoría cuántica (Penrose, 89/90).

6. ¿Cómo es el universo: finito, ilimitado, infinito (con principio pero sin fin o sin principio ni fin)...

1 «Un número natural n se llama perfecto si n es igual a la suma de sus divisores distintos de él mismo; por ejemplo, 6 y 28 son números perfectos».

Penrose sugiere que este conjunto de situaciones deben llevarnos a una nueva reflexión sobre la naturaleza del pensamiento y sobre la conciencia. El corazón de esta reflexión es la forzosa naturaleza no-algorítmica de ciertos aspectos del conocimiento humano. En efecto, si todo pudiera reducirse en nuestro funcionamiento mental a procesos algorítmicos, no podríamos aceptar, como aceptamos, determinadas verdades matemáticas que no son demostrables, y que no obstante vemos que lo son.

Es necesario preguntarse si para mantener esta razonable «conjetura» no hay más remedio que acudir a las ideas eternas de Platón o si por el contrario, tal conjetura cabe en un marco de explicación racional-constructivista. Ya hemos señalado que Penrose, posiblemente ha indicado adecuadamente el problema, aunque eso no signifique que haya apuntado en la buena dirección para resolverlo. Hay quien piensa que la naturaleza algorítmica o no del pensamiento es una cuestión metafísica y, por tanto, irrelevante. Yo no lo creo así. Acepto que tiene connotaciones metafísicas, pero es un asunto *decidible* por una combinación de métodos formales y experimentales. En este punto, estoy con Penrose, el teorema de Gödel es relevante, tanto si la mente humana fuera completamente algorítmica como si no lo fuera. Mi punto de vista, aquí distinto de Penrose, es como sigue:

Si lo fuera, le ocurriría lo que a los sistemas formales, esto es, no se autocontendría, y, por tanto, no podría autoexplicitarse de un modo completo.

Si por el contrario, no fuese algorítmica, el teorema de Gödel no le afectaría, pero entonces no podrían explicitarse, tampoco, determinados procesos —algunos, si, pero TODOS NO— en un

ordenador, pues serían de un orden «meta-cuántico».

Lo que no sabemos es si en el futuro habrá ordenadores meta-cuánticos. Pero esto ya si que es una cuestión metafísica. Así, vemos que no es necesario comprometerse con Platón para ir más allá de ciertas rigideces y dogmatismos de algunos postulados de la I.A. Lo que queda al arbitrio de cada cual es la interpretación que de este hecho maravilloso se pueda hacer.

El teorema de Gödel, no sólo su conclusión sino el procedimiento seguido en su demostración es uno de los momentos más grandiosos del espíritu humano. Merece la pena meditar permanentemente sobre él.

Mi conclusión es la siguiente: si bien la prueba de Penrose no es concluyente, sí, se puede encontrar una orientación que finalmente conduzca a formular una prueba concluyente. Aquí la he dejado apuntada.

5. Las situaciones engañosas

EL conocimiento de la realidad física se ve entorpecido por la existencia de situaciones engañosas. La dificultad mayor que evita o retrasa el progreso intelectual del sujeto radica, tanto en su fijación en los aspectos aparentes de la realidad, como en la aproximación cognitiva de carácter «figurativo». La una y la otra confunden al sujeto y le impiden la construcción de un conocimiento operativo que es el único capaz de liberarnos del «engaño de la apariencia».

El conocimiento matemático, no por tener un carácter extremadamente abstracto, se ve libre

de las seducciones de las situaciones engañosas, es decir, de aquellas situaciones que no son lo que parecen. Cuesta mucho trabajo, por ejemplo, comprender que el enunciado: «por un punto exterior a una recta sólo puede trazarse una, y, sólo una, paralela», *primero*, no es autoevidente, y, *segundo*, es imposible su demostración sin incurrir en un razonamiento circular. En efecto, hasta el siglo XIX, por obra de Lobachevsky y Riemann, entre otros, no se demostraría la imposibilidad de deducir de otros axiomas el axioma de las paralelas.

Una de las herramientas con las que contamos para ayudar al estudiante a superar las situaciones engañosas, es nuestro conocimiento del mejor modo de presentar los contenidos matemáticos a través de los textos didácticos.

Carlos Romera (1991) ha comparado el rendimiento de alumnos de una escuela técnica cuando se enfrentan a dos textos, uno de los cuales sólo difiere del otro en que se ha cambiado la diagramación para destacar los conceptos fundamentales de un modo más notorio, y, en la inclusión de un conjunto de actividades de autoevaluación.

Los resultados muestran una tasa de comprensión de los conceptos fundamentales en los alumnos que habían estudiado el texto «modificado». También se mantiene la misma superioridad en la resolución de problemas que demandan la mera aplicación de lo estudiado. Sin embargo, no hay diferencias cuando de lo que se trata es de resolver problemas de nivel superior, donde es necesario relacionar distintos conceptos.

Es de gran importancia presentar los contenidos matemáticos de un modo facilitador, que permita al alumno superar las situaciones engañosas que le inducen a error.

6. Las diferencias individuales

DESDE un tiempo a esta parte, va abriéndose camino en este ámbito de investigación, cada vez con mayor nitidez, la noción de la importancia que las diferencias individuales tienen en el modo de aprender del sujeto. Cabía pensar, por tanto, que la impulsividad/reflexividad (I/R) podría ser una variable a tener en cuenta a la hora de diseñar programas de aprendizaje de resolución de problemas de aritmética.

¿Podría, por sí sólo, un aprendizaje que lleve al sujeto a conductas más reflexivas provocar una ganancia, indirecta, en la resolución de problemas?

¿Sería eficaz un tratamiento de enseñanza que hiciera hincapié en los sucesivos pasos en la estrategia de resolución, inspirándose así en el «esquema reflexividad», más que otro que lo hiciera en las habilidades algorítmicas?

Vamos a ver que ha ocurrido en un experimento, llevado a cabo por Isabel Moreno y Rosa Sanz (1992), con el fin de poner a prueba estas posibilidades.

El número de sujetos que participó en la investigación fue de 75, agrupados en tres grupos: Grupo A (problemas), Grupo B (control) y Grupo C (reflexividad).

La edad de los niños fue de 10-11 años y cursaban 5 de EGB. Con el fin de controlar la posible influencia de la capacidad mental, de forma que los grupos tuvieran un promedio semejante en este operador oculto, se pasó el FIT de Pascual-Leone. Para esta edad, la teoría predice un $Mp=e+4/e+5$ (4.5). Los resultados obtenidos apuntan, como puede verse en la tabla 1, en esa dirección.

La reflexividad/impulsividad se midió con el MFFT, y para los efectos de esta exposición sólo vamos a tener en cuenta la puntuación que da el número de aciertos y no el tiempo de latencia.

Los problemas de aritmética eran 10, y cada uno tenía una puntuación máxima de 1.

Todos los sujetos fueron examinados, antes de distribuirlos en los tres grupos (dos experimentales y uno de control) en Mp, I/R y Problemas (P).

El grupo A recibiría posteriormente un conjunto de sesiones con el fin de potenciar en los niños unas adecuadas estrategias de resolución de problemas. Este era en resumen el esquema de enseñanza:

«Leer el problema y fijarse si hay alguna palabra que no conozco. Buscar o preguntar qué quiere decir esa palabra.

Localizar los datos fundamentales contestando a estas preguntas:

1. ¿QUE ME PREGUNTAN? Intento completar la pregunta si en el problema está incompleta.
2. ¿QUE DATOS TENGO? Saco los datos con los que tengo que operar, y me olvido de todos los que no sean necesarios.
3. TENGO QUE... Decidir qué operación tengo que hacer».

El grupo C recibió entrenamiento directo en la forma de responder adecuadamente al test de I/R.

El grupo B, por su parte, hizo el papel de grupo control, al que se entretuvo realizando amenos pasatiempos.

Inmediatamente después de las sesiones de intervención, todos los sujetos fueron examinados de nuevo en I/R y en P. Y pasado un cierto tiempo volvieron a ser examinados en P.

En la tabla 1 están resumidos los resultados obtenidos:

| | Mp | I/R1 | I/R2 | P1 | P2 | P3 | +I/R | +P |
|---------|------|------|------|-----|------|------|------|------|
| grupo A | 4,54 | 15,6 | 17,6 | 4,9 | 6,12 | 6,4 | 1,96 | 1,48 |
| grupo B | 4,94 | 17,4 | 17,3 | 4,9 | 5,96 | 5,96 | -0,0 | 1 |
| grupo C | 4,82 | 16,6 | 16,7 | 5,1 | 5,84 | 6,12 | 0,12 | 1 |

Tabla 1.

+I/R es la media de la ganancia obtenida del pretest al post test en impulsividad/reflexividad.

+P es la media de la ganancia obtenida del pretest (P1) al posttest (P3).

Las conclusiones más interesantes que cabe destacar son las siguientes:

1) El grupo A que recibe tratamiento en la resolución de problemas (no obstante ser ligeramente inferior en Mp y en I/R)² mejora más, aunque la diferencia no es estadísticamente significativa, que el grupo control(B) y el otro grupo(C), que también mejoran, sin duda por un puro efecto evolutivo: los sujetos a esta edad están en un continuo desarrollo. [El análisis de varianza efectuado sobre las medias de las ganancias respectivas da una $F=1.095$ con una probabilidad de 0.340] (ver gráfico 2).

2) El grupo A mejora sensiblemente, en precisión, en el test de I/R, además de forma homogénea, mientras que ninguno de los otros dos grupos, ni siquiera el que recibió entrenamiento específico en esa habilidad, lo hace. [El análisis de varianza efectuado sobre las medias de las ganancias respectivas arroja una $F=5.785$ con una probabilidad asociada

de 0.005. Las diferencias entre el grupo A y los otros dos grupos B y C son significativos con un nivel de confianza de 0.008 y 0.019, respectivamente] (ver gráfico 1).

Ante estos resultados cabe hacerse las siguientes preguntas?

1) ¿Cómo explicar que un programa de aprendizaje en la resolución de problemas aritméticos (a los 10-11 años) no consiga efectos sensiblemente superiores a los producidos por el propio desarrollo (en un contexto de escolaridad diaria) autónomo de los sujetos?

2) ¿Cómo explicar que un programa de entrenamiento hacia una mayor reflexividad, en un contexto específicamente perceptivo-intelectivo, tampoco tenga ningún efecto apreciable ni sobre la I/R ni sobre la resolución de problemas aritméticos?

3) Y ¿cómo explicar, por el contrario, que el programa de aprendizaje de resolución de problemas, implícitamente dirigido hacia una mayor atención y cuidado a los pasos de la resolución, sí tenga, en cambio, efectos significativos sobre las puntuaciones en el MFFT (variable precisión), mejorando la actuación de los niños, de un modo homogéneo? Además: todos mejoran, tanto los lentos como los rápidos.

La posible explicación habría que buscarla en los siguientes puntos:

2 Esto se hizo así para evitar que el grupo superior en Mp y en I/R fuera quien se beneficiara del entrenamiento. Si así hubiera sido podría haberse alegado que la ganancia era por efecto de su ligera superioridad de partida.

1.- La existencia de una transferencia *latente* abajo-arriba. En efecto, un entrenamiento en heurísticos de nivel específico, o con Shafrir & Pascual-Leone (1990) en el procesamiento de esquemas ejecutivos (específicos) acaba influyendo sobre una habilidad meta-ejecutiva o más general, es decir, se propaga desde abajo a arriba, al proporcionar a los sujetos oportunidades de realizar un aprendizaje ejecutivo.

2.- Por el contrario, la propagación arriba-abajo no es viable. Todos los sujetos precisos, sean rápidos o lentos, tienen un tiempo de latencia superior, *tras la comisión de un error*, que los imprecisos (Shafrir & Pascual-Leone, 1990), y, ahí parece estar la clave de su superior actuación en problemas de inferencia. Un aprendizaje de resolución de problemas de aritmética que acentúa la importancia de **marcar los pasos de resolución**, finalmente dará ocasión a los niños de desarrollar fuertes *controles* sobre sus previos procesos automatizados pero escasamente elaborados, que finalmente cristalizarán en esquemas ejecutivos no automatizados, como fruto más bien de esfuerzo mental y síntesis dinámicas que obligan al sujeto a un proceso de des-centración. *The low inferential ability of children with low postfailure reflectivity is not caused by intrinsic developmental deficiencies (e.g., maturational deficiency in the reserve of mental capacity). Rather, it is caused by an extrinsic executive deficiency resulting from lack of prior executive learning opportunities* (p. 385).

Tenemos todavía un escaso conocimiento de las leyes que rigen el complejo proceso de enseñanza/aprendizaje. Nuestra única esperanza de avance radica en la formulación de una teoría omnicompreensiva, capaz de hacer previsiones no triviales de los efectos de la intervención educativa. Es lo que vamos a hacer en el último (por ahora) apartado, utilizando como base la teoría de los operadores constructivos.

7. Un intento de articulación de todos los aspectos

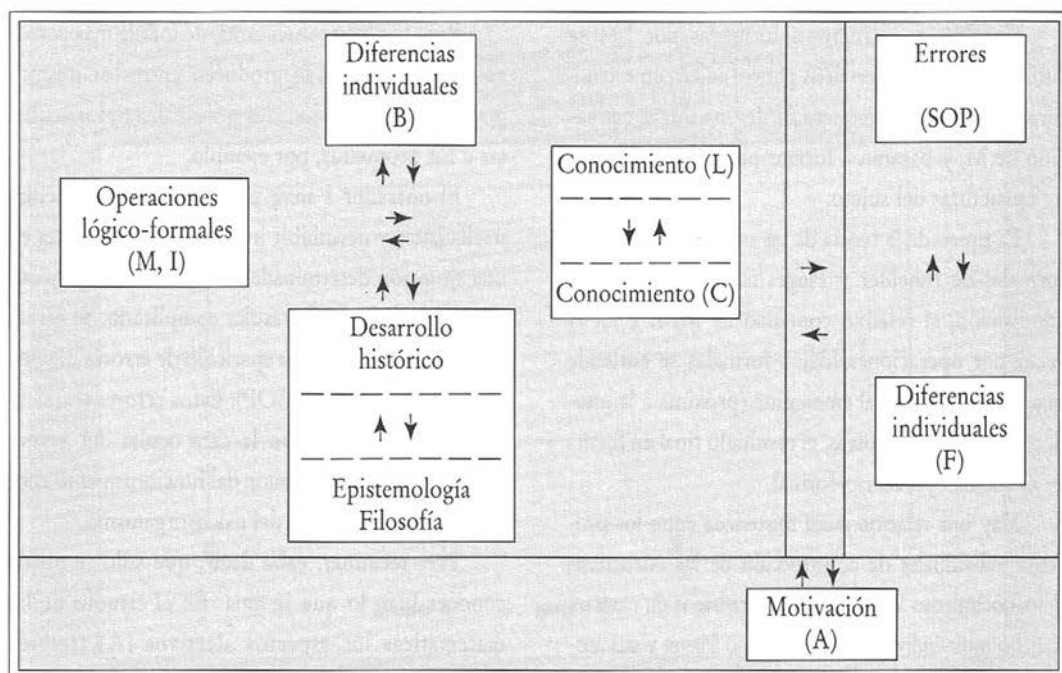
NO voy a dedicar un apartado especial al asunto de la motivación como había indicado al comienzo del artículo, no porque no crea que es importantísimo, todo lo contrario; sino porque pienso que si se logra la articulación sugerida en este último apartado, podrían haberse sentado las bases para la solución del problema de la motivación.

En el gráfico de la página siguiente presentamos un ensayo de posible interrelación entre todos estos aspectos.

Entre paréntesis se ha señalado la (posible) vinculación de cada una de las *notas (aspectos) comentadas* con 8 de los operadores ocultos o silenciosos de la teoría de los operadores constructivos (Pascual-Leone, 1978). Estos serían los responsables «psico-orgánicos» de cada uno de los aspectos apuntados.

- El operador de aprendizaje C o aprendizaje de contenido.
- El operador de aprendizaje L o aprendizaje lógico-estructural.
- El operador M o capacidad, atención o potencia mental.
- El operador F o factor de campo.
- El operador A, responsable de los factores afectivos.
- El operador I o factor de interrupción.
- El principio de sobre-determinación esquemática de la actuación o principio SOP [Schematic Overdetermination of Performance].
- El operador B se refiere a los sesgos y creencias personales, estructuras estilísticas y valores, características culturales...

Es creencia comunmente extendida, entre los



educadores poco avisados, que en el aprendizaje de las matemáticas sólo intervienen estructuras L (lógico-estructurales), mientras que las estructuras C (contenido) están, prácticamente ausentes. Al introducir los dos operadores L y C queremos poner de manifiesto que ambos son funciones hardware del psico-organismo, de carácter fundamental, necesarias e inevitables en cualquier proceso cognoscitivo. Por tanto también en el aprendizaje de las matemáticas.

Lo que ocurre es que según en que ámbito nos movamos (matemáticas o historia, por ejemplo) «emergerán» o «aparecerán» de un modo distinto. Es decir lo que se entiende por estructuras C en matemáticas es muy distinto de lo que se entiende por estructuras C en la adquisición de nociones sociales o económicas.

L y C están en relación (subyacente) dialéctica, pero no hay que entender tal dinámica en términos lineales, absolutos o mecánicos; sino, por el contra-

rio, de un modo abierto, contextual o relativo³.

Otro error de consideración que se comete al analizar los factores implicados en la resolución de problemas complejos, consiste en no diferenciar, convenientemente, entre el, aquí llamado, operador M y el operador L. En su lugar se utiliza un sólo constructo, que pretende amparar a ambos.

El operador L es la función que permite al psico-organismo estructurar el campo ilimitado de lo real. Sin esa capacidad sería imposible poner orden en el océano estimular de la realidad.

El operador M, en cambio, es la energía o atención mental, que dirige al psico-organismo en su búsqueda incesante de nuevos grados de abstracción. La síntesis entre L y M hace posible la construcción de los esquemas, los algoritmos, los invariantes que se aplicarán a una gran variedad de situaciones.

³ En Corral (1992) puede encontrarse una aproximación al análisis de la interacción entre estos dos operadores (L y C).

Cuando las estructuras formadas por LM se automaticen, se convertirán para el sujeto en estructuras «C», y ya no requerirán de una nueva activación de M, y pasarán a formar parte del repertorio de estructuras del sujeto.

Es típico de la teoría de las operaciones lógico-formales de Inhelder y Piaget no distinguir en su adquisición, el relativo concurso de M, L y C. A veces por operaciones lógico-formales se entiende una capacidad mental emergente (próxima a la inteligencia general), y, otras, el resultado final en forma de esquema operatorio-formal.

Hay una relación cuasi misteriosa entre los procesos individuales de construcción de las estructuras de conocimiento y los procesos históricos de carácter social o inter-individual. Nadie como Piaget y sus asociados ha comenzado a desentrañar las posibles leyes que gobiernan tales vínculos (Piaget y García, 1982).

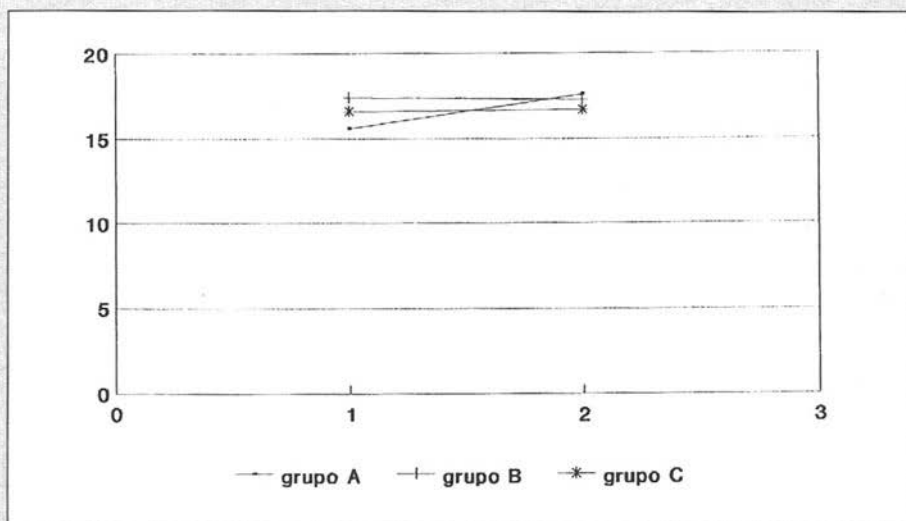
Por lo que respecta a las diferencias individuales (B), lo que más se ha estudiado es su interacción con el operador F, que es el responsable de los efectos (internos) del campo perceptivo. Es lo que se denomina estilo cognitivo: dependencia-independencia del campo perceptivo e impulsividad-reflexividad, en particular.

Pero también caben otras, de índole más personal, como las que se producen entre los mismos matemáticos: intuicionistas o formalistas; los analistas y los géómetras, por ejemplo.

El operador I sirve para inhibir los esquemas irrelevantes y desinhibir los esquemas relevantes en una situación determinada, lo que a causa (generalmente) de factores F, resulta complicado. Se crean, así, situaciones donde la aparición de errores es poco menos que inevitable (SOP). Estos errores (explicables racionalmente) son la cara oculta del avance intelectual, y, son expresión del funcionamiento cognoscitivo (subyacente) del psico-organismo.

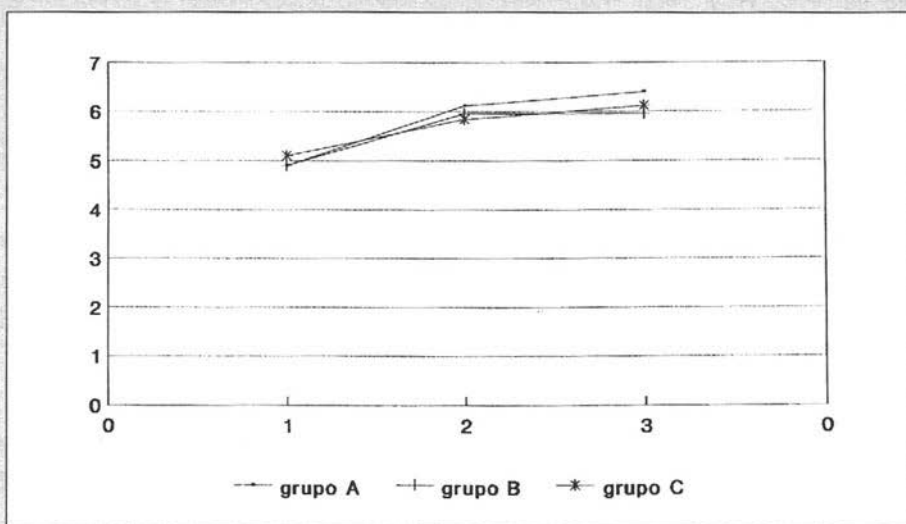
Para terminar, cabe decir, que sólo se puede conocer bien lo que se ama. En el estudio de las matemáticas los aspectos afectivos (A) también son importantes. Sin motivación interna su aprendizaje se convierte en una obligación insoportable. Esto todos lo sabemos. Sólo un cambio de perspectiva, por parte del profesor, podrá conseguir que todas las partes del sistema encajen suavemente entre sí. Quizás, entonces, habremos dado un paso decisivo: los alumnos comenzarán a apreciar que sin matemáticas no hay progreso espiritual.

Impulsividad-Reflexividad Pre-test y post-test



Según grupos

Problemas pre-, post-test 1 y post-test 2



Según grupos

BIBLIOGRAFÍA

- ALEKSANDROV, A. D. et al. (1979): *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Vol. 1. Madrid: Alianza.
- AUSUBEL, D. P. (1968): *Psicología Educativa: un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.
- BAKER, A. (1984/1986): *Breve introducción a la teoría de números*. Madrid: Alianza.
- CALVINO, I. (1989): *Seis propuestas para el próximo milenio*. Madrid: Siruela.
- CORRAL, A. (1986): La dificultad de enseñar el razonamiento proporcional. *Infancia y Aprendizaje*, 35-36, 47-58.
- CORRAL, A. (1987): El aprendizaje de la estrategia de comparación de proporciones. *Infancia y Aprendizaje*, 37, 33-43.
- CORRAL, A. (1992): La interacción entre el aprendizaje lógico-estructural (L) y el aprendizaje de contenido (C). *Tarbiya, Revista de Investigación e Innovación Educativa*, 1/2.
- CORRAL, A. y TEJERO, L. (1986): Del pensamiento formal a la comprensión de la formalización matemática de la combinatoria, según dos organizaciones formales diferentes. *Revista de psicología general y aplicada*, vol. 41(6), 1.149-1.161.
- DAUBEN, J. W. (1980/1984): El desarrollo de la teoría de conjuntos cantoriana. En I. GRATTAN-GUINNESS: *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910*. Madrid: Alianza.
- FISHER, K. M. y LIPSON, J. I. (1985): Information processing interpretation of errors of college science learning. *Instructional Science*, 14, 49-74.
- HAWKING, S. (1988/1990): *Historia del tiempo*. Madrid: Alianza.
- HESCHEL, A. J. (1982/1984): *Maimónides*. Barcelona: Muchnik.
- INHELDER, B. y PIAGET, J. (1955/1972): *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Buenos Aires: Paidós.
- LERAY, J. (1979): La invención en matemáticas. En J. PIAGET et al. *Epistemología de la matemática*. Buenos Aires: Paidós.
- MORENO, I. y SANZ, R. (1992): *La importancia de las estrategias y del estilo cognitivo en la resolución de problemas aritméticos*. Investigación inédita.
- NAGEL, E. y NEWMAN, J. R. (1958/1979): *El teorema de Gödel*. Madrid: Tecnos.
- NOVAK, J. D. (1977/1982): *Teoría y práctica de la educación*. Madrid: Alianza.
- PASCUAL-LEONE, J. (1978): La teoría de los operadores constructivos. En J. A. DELVAL (comp.): *Lecturas de psicología del niño* (vol. 1). Madrid: Alianza.
- PIAGET, J. y GARCÍA, R. (1982): *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Madrid: Siglo XXI.
- PAULOS, J. A. (1988/1990): *El hombre anumérico*. Barcelona: Tusquets.
- PENROSE, R. (1989/1991): *La nueva mente del emperador*. Madrid: Mondadori.
- ROMERA, C. (1991): *Estudio comparativo del aprendizaje mediante un libro tradicional y un texto modificado a partir del primero*. Investigación inédita.
- SHAFRIR, U. y PASCUAL-LEONE, J. (1990): Postfailure reflectivity/Impulsivity and spontaneous attention to errors. *Journal of Educational Psychology*. vol. 82, 2, 378-387.
- TEJERO, L. y CORRAL, A. (1987): La importan-

cia de los conocimientos previos: un estudio en el campo de las matemáticas. *A distancia*, vol. 4, 14-15.

TEJERO, L. y CORRAL, A. (1988): Educar para la elegancia y la claridad. *A distancia*, vol. 1, p. 9.

Resumen

Utilizando como base la teoría de los operadores constructivos de Pascual-Leone, se ensaya un modelo que articule e integre de un modo armonioso los distintos aspectos que intervienen en el proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. El objetivo último es la construcción de una teoría omnicomprendensiva de la educación matemática, capaz, por tanto, de hacer previsiones no triviales de los efectos de la intervención educativa en este campo del conocimiento.

Palabras clave: Operaciones lógico-matemáticas. Conocimientos previos. Epistemología, historia, filosofía de las matemáticas. Estilo cognitivo. Situaciones engañosas. Operadores constructivos. Análisis de tareas.

Abstract

Based on the constructive operators theory by Pascual-Leone (1978), a model that integrates and permits the smooth interaction of the different aspects that play a role in the teaching/larning of mathematics is proposed. The ultimate target is the elaboration of a comprehensive theory of the mathematical education. Thus this theory would be able to make relevant predictions on the effects of educational intervention in this field of knowledge.

Key words: Logical-mathematical operations. Advance knowledge. Epistemology, history, philosophy o mathematics. Cognitive style. Misleading situations. Constructive operators. Task analysis.

Antonio Corral

Dpto. de Psicología Evolutiva.

Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Ciudad Universitaria. 28040 Madrid