



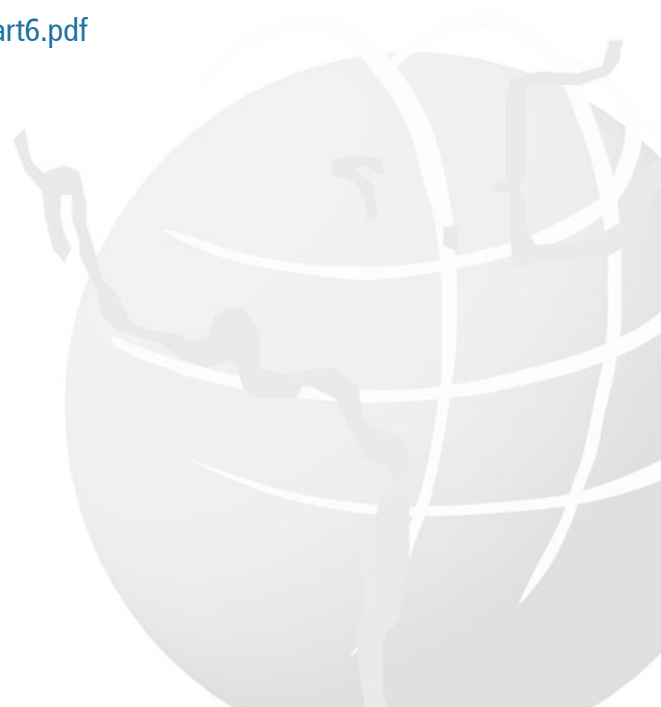
## LOS DOCENTES Y SU FORMACIÓN INICIAL HACIA EL AULA DE MATEMÁTICA. UNA PROPUESTA CON MODELIZACIÓN Y NUEVAS TECNOLOGÍAS

*Zoraida Paredes, Martha Iglesias y José Ortiz*

Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación  
(2009) - Volumen 7, Número 1

<http://www.rinace.net/reice/numeros/arts/vol7num1/art6.pdf>

Fecha de recepción: 5 de noviembre de 2008  
Fecha de aceptación: 10 de diciembre de 2008



**E**n esta investigación se evalúa un programa de formación que integra, a través del álgebra lineal, el uso de un software de cálculo simbólico y la modelización como componentes del conocimiento didáctico para la formación inicial de profesores de Matemática. También se analiza el conocimiento didáctico de los futuros profesores derivado del programa implementado, en el cual ellos participaron. A efecto del análisis curricular se parte de una estructura teórica soportada en las cuatro dimensiones siguientes: conceptual, cognitiva, formativa y social (Rico, 1997a, 1997b). Este marco teórico considera que el conocimiento didáctico de los tópicos matemáticos debe fundamentarse en un análisis conceptual de los tópicos en cuestión junto con el estudio de los sistemas de representación implicados, la modelización, un análisis cognitivo que estudie los errores y dificultades, un análisis fenomenológico, un análisis histórico del tópico matemático y de los materiales y recursos relacionados. Este estudio se lleva a cabo en el contexto de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL), Núcleo Maracay, Estado Aragua, Venezuela, dentro de los planes de formación inicial del profesorado de Matemática vigentes en el curso 2004-2005.

El presente trabajo surge de la preocupación por la calidad de la formación de los docentes de Matemática para educación básica y media en Venezuela. Partimos de la consideración que es necesario hacer propuestas que tiendan a superar la formación tradicional de unos cursos de Matemática por un lado y una formación general en ciencias de la educación por el otro, tal como lo sugieren Acevedo y Falk (2000). Consideramos que los programas de formación docente deben abordar una formación en Didáctica de la Matemática que contribuya a profundizar en el conocimiento matemático escolar que impartirá el docente en su futuro trabajo profesional. Si los métodos de enseñanza no son estudiados en el contexto en que han de ser implementados, los futuros profesores pueden no saber identificar los aspectos esenciales ni adaptar las estrategias instruccionales que les han sido presentadas en términos abstractos a su materia específica o a nuevas situaciones (Iglesias Inojosa, 2000; Gil, Pessoa, Fortuny y Azcárate, 2001; Ensor, 2001, Agudelo-Valderrama, 2007). En este mismo orden de ideas, Ortiz (2006, 2008) señala que es necesario capacitar al nuevo profesor de Matemática y crearle una infraestructura dentro de ese nuevo contexto, para favorecerle la adquisición de nuevas competencias didácticas. Asimismo, la formación inicial de los profesores de Matemática es esencial para avanzar en los cambios necesarios que permitan la introducción de nuevos métodos de enseñanza (Darling-Hammond, 2006).

Cabe señalar que el diseño curricular vigente actualmente en la UPEL (1996), para la especialidad de Matemática, establece algunos objetivos que son necesarios considerar en función del presente estudio, ya que se refieren a su didáctica, específicamente:

*\* Desarrollar a través de los métodos, técnicas y procedimientos propios de las disciplinas de la Matemática, un conjunto de estrategias orientadas al logro de experiencias de aprendizaje sistematizadoras y formalizadoras que favorezcan el dominio de los conocimientos de las diversas disciplinas y propicien una actitud positiva hacia la matemática. (p.11)*

*\* Diseñar, desarrollar y evaluar situaciones didácticas y secuencias instruccionales relativas a los tópicos de los programas de Matemática de los niveles educativos en los cuáles se desempeñará. (p. 11).*

En este mismo orden de ideas, los planes y programas de estudio señalan como propósitos fundamentales para los cursos de Matemática, desarrollar en los estudiantes habilidades y conocimientos

para adquirir un pensamiento crítico, reflexivo, flexible, capaz de realizar generalizaciones, clasificar, inducir, inferir, estimar numéricamente y resolver problemas.

En el componente de formación especializada del Plan de Estudios del Diseño Curricular de la Especialidad de Matemática en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL Maracay), aparecen asignaturas dirigidas a la formación de una serie de competencias en el futuro egresado. Entre estas asignaturas está Introducción al Álgebra Lineal y cuyo propósito es iniciar al futuro docente en el manejo y aplicación de nociones, conceptos, principios y métodos básicos de álgebra lineal a través del estudio de los espacios vectoriales, las transformaciones lineales y los sistemas de ecuaciones lineales, haciendo énfasis en el carácter formal de esta disciplina y en los procedimientos algorítmicos como una herramienta didáctica para la resolución de problemas inherentes a la especialidad.

No obstante, a pesar que el álgebra lineal constituye un aparato conceptual de utilidad creciente en todos los campos de aplicación de la Matemática (Labraña, Plata, Peña, Crespo y Segura, 1995), generalmente no se plantean problemas de mayor dificultad, ni se varían las variables o los datos, porque los alumnos no lograrían visualizarlos en el pizarrón.

Se han identificado elementos que generan debilidades en la apropiación de conocimientos durante el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal. Entre estos elementos se encuentran:

- Uso del formalismo, el agobio ante las nuevas definiciones y la pérdida de conexión con lo que los alumnos ya saben de matemáticas (Dorier, Robert, Robinet y Rogalski, 2000).
- Deficiencia de conocimientos matemáticos básicos y específicos que han debido adquirir previamente los estudiantes; por ejemplo, ciertas nociones de lógica elemental, ya que, se asume que las mismas permiten al estudiante entender la formalidad de la teoría de espacio vectorial (Labraña, Plata, Peña, Crespo y Segura, 1995).
- La complejidad del lenguaje específico del álgebra lineal y el alto grado de abstracción de los conceptos (Labraña, Plata, Peña, Crespo y Segura, 1995; Tucker, 1993).
- Poca utilización de problemas como base para la introducción de conceptos y de propiedades que, con las indicaciones e instrucciones pertinentes, sugieran su descubrimiento (Berenguer, 2003; Ortiz, Rico y Castro, 2008).
- Manejo de mucha teoría y poca práctica, debido a la naturaleza del Álgebra Lineal, la cual puede decirse que es una teoría unificada y generalizada.
- Poca vinculación de los contenidos manejados a este nivel con el nivel de Educación Básica, Media y Diversificada, que es donde se desenvolverán los futuros docentes (Ortiz, Rico y Castro, 2008).

Una forma de enseñanza eficiente debería contemplar un entrenamiento de la intuición, que permita al alumno descubrir propiedades y características de los objetos de estudio a partir del análisis de diversas situaciones del entorno, pero esto requeriría la realización de muchos cálculos para poder intuir resultados generales a partir de observaciones particulares y posteriormente un buen razonamiento para contrastar la certeza de tales intuiciones (Llorens, 1993). De esta manera, la modelización aparece como un proceso de natural desarrollo en los campos del álgebra. El desarrollo de la informática y la incorporación de la tecnología en el aula abren la posibilidad de contemplar la experimentación y la investigación, a la vez que favorecen la generación de nuevos y mejores recursos didácticos en la

enseñanza de la Matemática (Huertos, 1995; Cedillo y Kieran, 2003). En ese orden de ideas, Henn (2007), afirma que el estudiante debe adquirir habilidades para seleccionar métodos apropiados para la aplicación de la Matemática en diferentes áreas de la vida. Esta afirmación cobra importancia al considerar que el contexto es esencial en el proceso de modelización matemática (Gay y Jones, 2008).

Asimismo, la tecnología tiene en el álgebra un terreno de aplicación para beneficio de los estudiantes y profesores. El uso de la computadora y un software de cálculo simbólico abren la atractiva posibilidad de experimentar con la Matemática. Desde el punto de vista efectivo, el dedicar menos tiempo a la realización de cálculos rutinarios permite que predomine la reflexión y el análisis de los resultados (García, 1993). Asimismo, algunas de las barreras que enfrenta el estudiante en el aprendizaje del álgebra lineal, pueden ser removidas con el uso adecuado de la tecnología (Berry, Lapp y Nyman, 2008). El software a utilizar es el Derive. Este programa tiene mucha aplicabilidad en el álgebra y el cálculo; permite, entre otras cosas, calcular derivadas, integrales, límites, trabajar con vectores, representación gráfica de curvas y funciones (Guzmán, 1993; Llorens, 1993). Desde el punto de vista de la formación, el uso de una computadora y un software de cálculo simbólico abren la atractiva posibilidad de experimentar con la Matemática. A veces la mejor forma de comprender el verdadero alcance de un teorema o efectividad de un algoritmo es analizar los resultados que se obtienen al variar o debilitar las hipótesis, condiciones iniciales, etc. Desde un punto de vista efectivo, el dedicar menos tiempo a la realización de cálculos rutinarios, permite primar la reflexión y el análisis de los resultados y, por último, se tiene a favor el factor motivación, resulta atractivo para los estudiantes y divertido el trabajo matemático con estos sistemas, que eliminar el trabajo rutinario y potencian la parte creativa (González y Martínez, 1996; Ortiz, 2006).

En este trabajo se formula la cuestión ¿Qué estrategias utilizan los estudiantes de la especialidad de Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador para enseñar álgebra lineal haciendo uso de la modelización matemática y de un software de Cálculo Simbólico como el Derive, a la vez que profundizan sus conocimientos algebraicos?. Esto conduce a evaluar un programa de formación docente para la enseñanza del Álgebra Lineal basado en el uso de un software de Cálculo Simbólico como el Derive y la resolución de problemas algebraicos susceptibles de ser abordados en el ámbito escolar, lo cual contempla valorar el diseño, la implementación y los resultados, así como, analizar de qué manera los estudiantes emplean el programa Derive cuando resuelven problemas de Álgebra Lineal.

## 1. METODOLOGÍA

De acuerdo a las interrogantes que guían a la investigación y a los objetivos que se pretenden alcanzar, la misma se ubica en el área de investigación sobre la *Formación Inicial del Docente de Matemática* y, además, abarca tópicos relacionados con la investigación en *Didáctica del Álgebra Lineal*, como el uso de los software de Cálculo Simbólico y la resolución de problemas del mundo físico, natural y social. Esto ubica el presente trabajo en el ámbito de la Línea de Investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico (Ortiz, 2004).

El estudio se desarrolló con estudiantes de la especialidad de Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL), Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara" de Maracay (IPMAR), Venezuela. Los mismos participaron de manera voluntaria en un programa de formación docente sobre Resolución de Problemas de Álgebra Lineal (RPAL) con el Derive. Asumiendo como programa un "...conjunto especificado de acciones humanas y recursos materiales diseñados e implementados

organizadamente en una determinada realidad social, con el propósito de resolver algún problema que atañe a un conjunto de personas" (Fernández-Ballesteros, 1996:24).

Esta investigación se sustentó en una *metodología de evaluación de programas educativos*, entendida ésta

*"... como un proceso de identificación de las fortalezas y debilidades de un programa educativo, de aspectos mejorables en la búsqueda de la calidad del programa en sí y de sus implicaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje, es decir, la mejora de los agentes hacia los cuales está dirigido el mismo" (Ortiz y Iglesias, 2006).*

Con esta investigación se pretende evaluar el diseño, implementación y resultados de un programa de formación docente que integrará el uso de un sistema de cálculo simbólico (SCS) como el Derive y la modelización en la resolución de problemas de álgebra lineal, en el diseño de propuestas didácticas.

La evaluación se realizó en tres momentos: diseño del programa, desarrollo del programa y los resultados del mismo. En cuanto al momento de diseño del programa, se contemplaron los objetivos de aprendizaje, la estructuración del contenido, las estrategias metodológicas, los materiales y recursos y las estrategias de evaluación. De modo que el momento de diseño se materializó mediante la presentación del programa de formación, el desarrollo de los materiales y recursos, la elaboración del cronograma de actividades y el plan de evaluación. En el momento de desarrollo del programa, se consideraron los niveles de aprovechamiento de los contenidos y la puesta en práctica del programa. En el momento de evaluación de los resultados, se analizaron las habilidades didácticas alcanzadas por los participantes en el programa de formación sobre el uso didáctico de la modelización en la resolución de problemas algebraicos y los software de cálculo simbólico.

Este programa fue diseñado para desarrollarse en diez (10) sesiones de trabajo presencial de tres (3) horas cada una. La modalidad de implementación fue la de curso – taller; es decir, un curso de formación teórico – práctico.

Las sesiones fueron divididas de la siguiente manera: Sesión N° 1: Preliminares, sesión N° 2: Exploraciones del Software Derive, sesión N° 3 y 4: Sistemas de ecuaciones lineales, sesión N° 5 y 6: Matrices, sesión N° 7 y 8: Vectores, sesión N° 9: Los Software de Cálculo Simbólico (SCS). Una experiencia en el aula y sesión N° 10: Diseño de una actividad didáctica.

Los objetivos del programa son: 1. Aplicar las herramientas del Derive en la resolución de problemas de álgebra lineal, 2. Emplear y manejar los comandos y herramientas básicas del Derive en el diseño de actividades didácticas para la enseñanza del álgebra lineal escolar y 3. Integrar el proceso de resolución de problemas de álgebra lineal y el uso del Derive en el diseño de actividades didácticas en el ámbito escolar.

De los objetivos anteriores se considera que los niveles de logro en los participantes se inicia con la familiarización del software Derive, sus comandos y herramientas. Una vez que los participantes conozcan las herramientas básicas, deberán incorporarlas en la resolución de problemas de álgebra lineal, haciendo uso de la modelización matemática. Finalmente los niveles de logro se evidenciarán con la integración de la modelización matemática y el uso del Derive en el diseño de propuestas didácticas para la enseñanza del álgebra lineal escolar.

Los contenidos del programa propuesto, y que llamamos RPAL, se presentan a continuación de acuerdo a cada uno de los componentes del mismo: el álgebra lineal escolar, la modelización y el uso del Derive.

- Contenidos del Álgebra Lineal Escolar: Ecuaciones lineales. Sistemas de ecuaciones lineales. Matrices. Vectores en el plano. Vectores en el espacio.
- Modelización matemática: Conceptualización del proceso de modelización. Resolución de situaciones problemáticas relacionadas con vectores, ecuaciones lineales y matrices. Aplicación de la resolución de problemas en actividades didácticas. La resolución de problemas y el uso de los SCS en la formación de profesores de Matemática.
- Software Derive: Introducción al manejo de Derive. Ejercicios y problemas con el apoyo del Derive. Manipulación de vectores, sistemas de ecuaciones lineales y matrices con Derive. Aplicaciones del Derive en actividades didácticas. Reflexiones acerca de la integración de la resolución de problemas y el uso de los SCS en el diseño de actividades didácticas.

En la evaluación del programa participaron un grupo de expertos y los futuros profesores, participantes del programa, denotados por  $P_1, P_2, \dots, P_{10}$ ; de estos últimos la valoración del programa se obtuvo a través de sus participaciones durante el curso-taller y las opiniones emitidas en las hojas de evaluación final, a través de las cuales se recogió información relevante para la evaluación de la pertinencia de los contenidos y lo concerniente a los aspectos organizativos (logístico y recursos) y la metodología seguida en la implementación del programa.

Para realizar la evaluación del desarrollo del programa, se consideraron las producciones de los participantes y sus opiniones acerca de los componentes del programa. Con respecto a las producciones se tomó en cuenta la información recabada en los cuadernos de notas, en las grabaciones de audio, en los archivos de trabajo y en las propuestas presentadas por los participantes en la última sesión de trabajo; además de considerar sus opiniones recabadas en las hojas de notas diarias y en la hoja de evaluación final del curso.

El análisis de las producciones se centró en los componentes de interés perseguidos con el programa RPAL; es decir, aplicación de la resolución de problemas de álgebra lineal y la modelización matemática, uso del Derive y su respectiva integración en el diseño de actividades didácticas para la enseñanza del álgebra lineal escolar, todo esto con respecto a los objetivos perseguidos en el programa de formación.

En este artículo se hará la presentación de la evaluación de los resultados, a partir del análisis de las producciones y opiniones de los participantes, referidos al uso del Derive cuando los participantes del programa abordaron la resolución de problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales, matrices y espacios vectoriales y, además, participaron en un proceso de reflexión didáctica sobre los componentes del mencionado programa.

Debido a la gran cantidad de información recabada en el curso-taller, para el análisis de las producciones se seleccionaron cuatro sesiones que se consideran importantes dentro del programa de formación como son la cuarta, la sexta, la octava y la décima. El motivo de la elección de estas sesiones es cada una de ellas da un aporte importante para el análisis de los componentes del curso, como es el uso del Derive y la modelización con respecto a los tópicos seleccionados como son los sistemas de ecuaciones lineales, matrices, y vectores, además que la sesión 10 permite ver de que manera los participantes integraron cada uno de estos componentes en el diseño de propuestas didácticas. Es de señalar que al centrar el análisis en estas sesiones, estos resultados fueron contrastados con los observados en las demás sesiones



con el fin de incorporar otros elementos y así conseguir la evaluación del desarrollo del programa en lo concerniente a los niveles de aprovechamiento de los contenidos por parte de los profesores en formación.

## 2. RESULTADOS

### 2.1. Análisis de las producciones de los participantes

En la sesión 4, se pretendía que los participantes aplicaran las herramientas del Derive y el proceso de modelización matemática, con la ayuda de los métodos gráficos y algebraicos en la resolución de problemas relacionados con sistemas de ecuaciones lineales. Se abordaron tres problemas. El problema N° 1, el cual está referido a una producción de tazas y platos, es el siguiente: *La Compañía Polflex fabrica tazas y platos de cerámica. Por cada taza o plato un obrero utiliza una cantidad fija de material que introduce en una máquina moldeadora de la cual sale la pieza seca y barnizada. En promedio un obrero necesita tres minutos para resolver su parte del proceso con las tazas y dos minutos con los platos. El material de una taza cuesta 25 Bs. y el material de un plato cuesta 20 Bs. ¿Cuántas piezas de cada tipo puede hacer un obrero en una jornada de trabajo de 8 horas si se gastan exactamente 4300 Bs en materiales?*

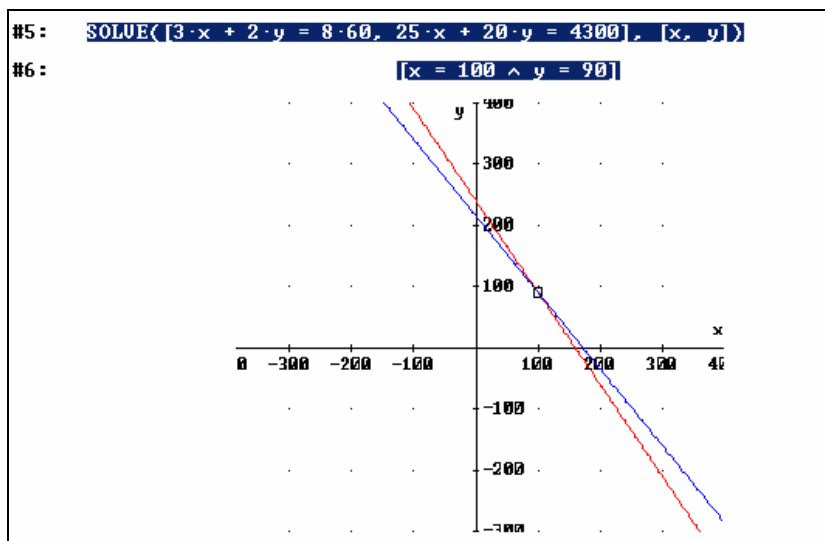
De acuerdo a como los participantes abordaron esta situación problema, se encontraron cuatro maneras de resolver:

- Resolución utilizando la modelización matemática y el Derive.
- Resolución mediante el Derive, grafican y no concluyen.
- Resolución mediante el Derive, no grafican ni concluyen.
- Resuelve directamente sin usar el Derive.

#### 2.1.1. Resolución utilizando la modelización matemática y el Derive

Los participantes P1, P2, P6 y P7, identificaron la situación problema y seguidamente después de un buen argumento construyeron su modelo 
$$\begin{cases} 3x + 2y = 480 \\ 25x + 20y = 4300 \end{cases}$$
, sistema que resolvieron mediante el comando SOLVE(expresión, variable), graficaron y concluyeron que la solución es  $x = 100$  y  $y = 90$ , que interpretaron diciendo que un obrero de la compañía Polflex puede producir 100 tazas y 90 platos diariamente.

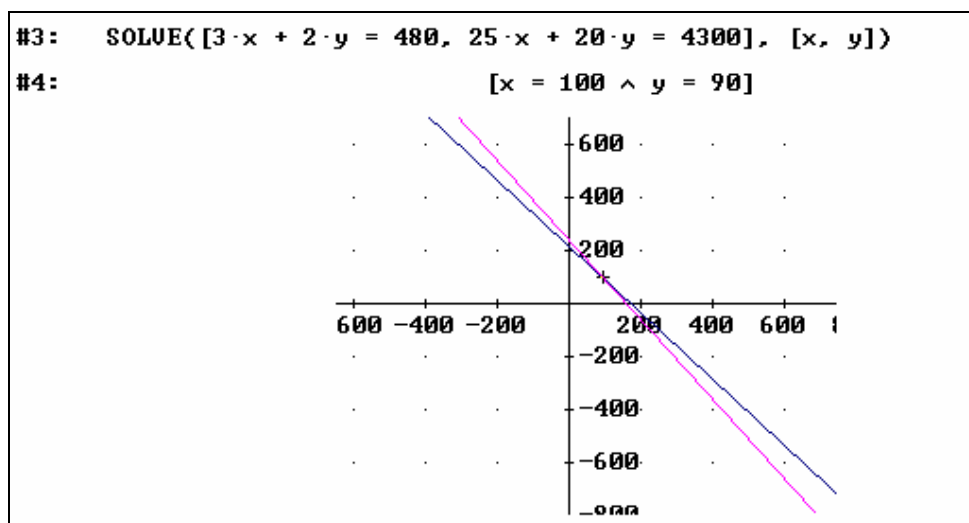
FIGURA 1. RESOLUCIÓN UTILIZANDO LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA Y EL DERIVE



2.1.2. Resolución mediante el Derive, grafican y no concluyen

En este caso se ubican los participantes P3 y P5, quienes resuelven directamente mediante el Derive el sistema  $\begin{cases} 3x + 2y = 480 \\ 25x + 20y = 4300 \end{cases}$ , graficaron y no concluyeron.

FIGURA 2. RESOLUCIÓN GRÁFICA MEDIANTE EL DERIVE



2.1.3. Resolución mediante el Derive, no grafican ni concluyen

En este caso se ubican los participantes P9 y P10, quienes resuelven directamente mediante el Derive el sistema, no grafican ni concluyen.



FIGURA 3. RESOLUCIÓN ALGEBRAICA MEDIANTE EL DERIVE

```

1. Fábrica de tazas y platos
#16: 3·x + 2·y = 480
#17: 25·x + 20·y = 4300
#18: SOLVE([3·x + 2·y = 480, 25·x + 20·y = 4300], [x, y])
#19: [x = 100 ^ y = 90]

```

#### 2.1.4. Resuelve directamente sin usar el Derive

En este caso se ubican los participantes P4 y P8, quienes resuelven directamente en el cuaderno de notas, sin usar el Derive, utilizando los métodos de reducción y sustitución.

En la sesión 8 se se pretendía que los participantes aplicarán las herramientas del Derive en el proceso de resolución de problemas relacionados con vectores en el espacio. A pesar que no se acudió al proceso de modelización matemática, los estudiantes aprovecharon para adquirir más competencia en el manejo del Derive. Uno de las actividades propuestas fue la siguiente: *Sean los vectores  $u$ ,  $v$  y  $w$  de  $\mathbb{R}^3$ , tal que  $u \cdot w = u \cdot v$ , con  $w$  distinto del vector nulo. ¿Se puede asegurar en este caso que  $w = v$ ? Razone su respuesta y en caso de ser falso dé un contraejemplo.*

En la figura 4 podemos ver las operaciones realizadas con el apoyo del Derive para dar respuesta a la cuestión planteada.

FIGURA 4. RESOLUCIÓN CON APOYO DEL DERIVE

```

2. Sean los vectores u, v y w de R^3, verificando: u·w=u·v,
con w distinto del vector nulo.
#14: U := [1, 2, 3]
#15: W := [0, 2, 1]
#16: U := [p, q, r]
#17: U · W = U · U
#18: ? = p + 2·q + 3·r
#19: SOLVE(? = p + 2·q + 3·r, p)
#20: p = -2·q - 3·r + ?
#21: p = -2·1 - 3·2 + ?
#22: p = -1
#23: U := [-1, 1, 2]
#24: ? = ?

```

En la sesión 10 se pretendía que los participantes presentaran y entregaran las propuestas diseñadas; para ello se les dio unas pautas que debían seguir, además que, debido a que venían trabajando en parejas, las propuestas fueron presentadas de esa manera, es decir cinco propuestas entre las que tenemos:

1. Una Propuesta Didáctica orientada a la resolución de problemas con matrices a través del uso del Derive.

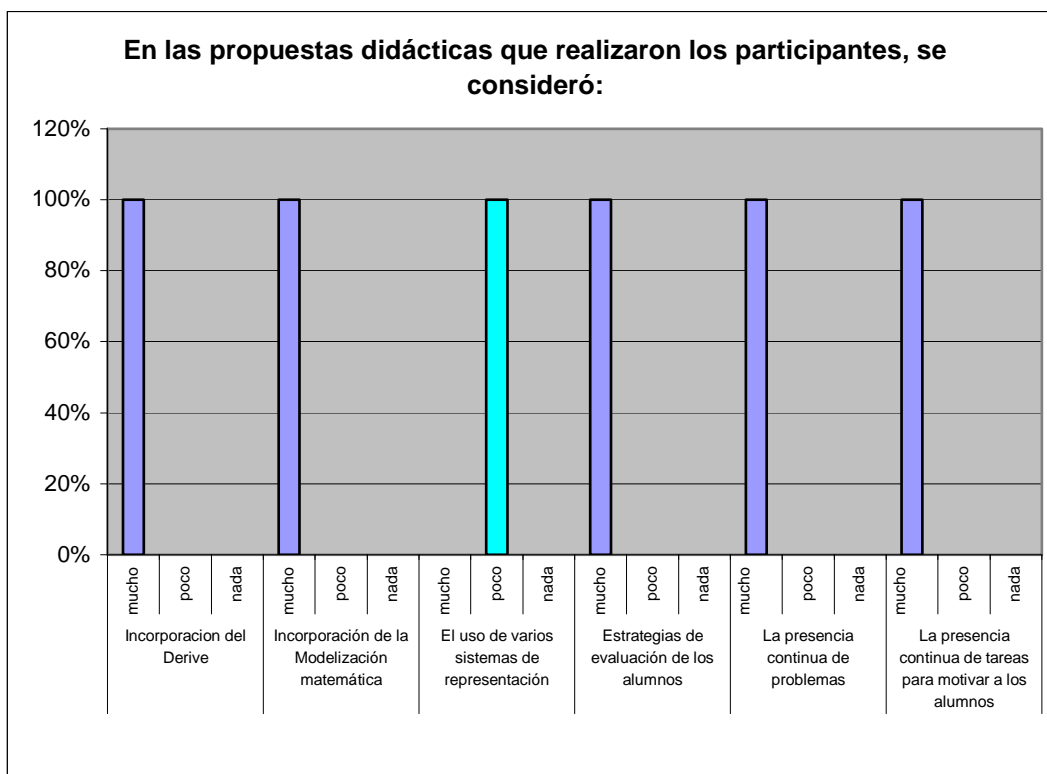
2. Utilización del programa Derive como recurso de reducción de tiempo de aplicación y complementación en la resolución de problemas referentes a las propiedades de vectores en el espacio tridimensional.
3. Utilización del Derive para la enseñanza de operaciones entre matrices.
4. Sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas (Propuesta dirigida a alumnos del último año de educación media).
5. Propuesta didáctica para la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal escolar: integración del software Derive en la resolución de problemas que conduzcan a sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Luego, de presentadas las propuestas, las mismas fueron devueltas para que ellos le hicieran los debidos cambios e incorporaran los aspectos que les faltaban.

Para la evaluación de las propuestas se consideró el titulo, la fundamentación, los objetivos, el planteamiento de las actividades, el análisis conceptual del contenido seleccionado (mapa conceptual), los contenidos y las estrategias metodológicas.

En la guía de observación se presentaba un ítem relacionado con las propuestas didácticas. Seguidamente, en la figura 5, se presenta los resultados de esta observación:

**FIGURA 5. ASPECTOS CONSIDERADOS POR LOS PARTICIPANTES EN LAS PROPUESTAS DIDÁCTICAS**



Como se logró constatar, en las propuestas diseñadas por los profesores en formación, incorporaron la modelización matemática y el Derive en la resolución de problemas relacionados con tópicos algebraicos manejados en el curso – taller: matrices, vectores y sistemas de ecuaciones que se trabajan en la escuela básica; es decir, consideraron cada uno de los elementos abordados en el programa de formación.

De esta manera se hizo el análisis de las producciones de los participantes obteniendo que:

- Se observa un dominio del uso del Derive.
- Utilizan la parte visual para interpretar los resultados.
- La mayoría hizo uso de la modelización matemática a la hora de resolver los problemas.
- Se evidenció competencia didáctica con el empleo del Derive al desarrollar actividades.
- Integración de la modelización matemática y del Derive en la resolución de problemas de contenido algebraico.
- La reflexión didáctica permitió que los futuros docentes, hicieran uso de la modelización y del Derive en el diseño de una actividad didáctica.

Del análisis de las propuestas didácticas diseñadas por los profesores en formación, se pudo observar que las situaciones que plantearon son del mundo real relacionadas con contenidos de álgebra Lineal manejados en la escuela básica, cercanas al entorno del alumno. En cuanto a los materiales y recursos, se evidenció el manejo y dominio del Derive, esto se pudo al relieve en las actividades propuestas. El alumno es un ente activo en este proceso de enseñanza y aprendizaje, pudiendo experimentar, conjeturar, formular, resolver, graficar, interpretar y el docente actúa como un facilitador y orientador. Estos señalamientos, revelan aspectos favorables en cuanto al programa de formación propuesto.

## 2.2. Análisis de las opiniones de los participantes

En cuanto a la utilidad que le dieron los participantes al Derive, fue como recurso de apoyo en la parte de cálculo, lo cual le permitió de alguna manera utilizar el mayor tiempo para el análisis e interpretación de los resultados y, en algunos casos, la formulación de conjeturas que por medio del software lograron rechazar o aceptar. Por otra parte, les pareció interesante la parte gráfica, el poder visualizar cambios en la misma con solo rotar o escalar en dos y tres dimensiones; esto les abre la posibilidad de experimentar con la Matemática y, por último, tenemos a favor el factor motivación, resulta atractivo para los participantes y divertido el trabajo matemático con estos sistemas SCS, que eliminan el trabajo rutinario y potencian la parte creativa, tal como lo señalan González y Martínez (1996).

Según los participantes el Derive permite el uso de representaciones simbólicas, el acceso a representaciones visuales dinámicas, y puede ser utilizado como medio de exploración y donde los alumnos pueden expresar ideas. Se enfatiza la importancia de las representaciones en el proceso de aprendizaje; el proceso de construcción de significados involucra el uso de representaciones y el aprendizaje de un concepto puede ser facilitado cuando hay más oportunidades de construir e interactuar con representaciones (tan diversas como sea posible) externas del concepto, tal como lo señalan García y Ortiz (2007).

En cuanto a la incorporación del Derive en el diseño de propuestas didácticas para la enseñanza del álgebra lineal escolar, señalan que lo incorporarían como un recurso de apoyo que en ningún momento suplanta al docente en su tarea, de lo contrario se requiere de una mayor preparación del mismo para

incorporar la tecnología en el aula. Esto quedó evidenciado en las propuestas didácticas diseñadas por los participantes del programa de formación.

Por otra parte señalan no haber tenido mucha dificultad en cuanto al uso del Derive, solo en las primeras sesiones por la simbología utilizada por el software, que con la práctica lograron superar y, por otra parte, recomiendan el uso de estos SCS no solo el Derive para la enseñanza de cualquier contenido algebraico escolar, pero con incorporación de más sesiones dedicadas al manejo del mismo, para superar algunas fallas que se puedan presentar más adelante.

Los profesores en formación opinan que la resolución de problemas algebraicos es una actividad central en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática y en particular del álgebra lineal escolar, es por ello que se deben plantear problemas creativos que guarden relación con el entorno de los alumnos, para así incrementar su motivación a la hora de resolverlos; es necesario despertar el interés y la curiosidad de los alumnos, que ayude a formular conjeturas y a considerar varias alternativas. Por otra parte, el buen uso que se dé a este proceso origina un incremento de la capacidad analítica de los estudiantes.

En cuanto a la incorporación de la resolución de problemas en el diseño de propuestas didácticas para la enseñanza del álgebra lineal escolar, señalan que lo incorporarían por su gran importancia, pero haciendo uso de la modelización matemática y con el apoyo de un recurso tecnológico como los SCS. Esto quedó evidenciado en las propuestas didácticas diseñadas por los participantes del programa de formación.

Por otra parte señalan no haber tenido mucha dificultad en cuanto al uso resolución de problemas, solo en los problemas donde requerían tener claros contenidos ya manejados, pero olvidados; lo que originó dificultad a la hora de analizar, resolver e interpretar los resultados.

Además de toda la información presentada, en la hoja de evaluación final del Curso – Taller se presentó un ítem, donde se le solicitaba a los participantes que expresarán argumentos a favor y en contra sobre el uso didáctico de la resolución de problemas de álgebra lineal, la modelización y el Derive.

A continuación se presentan las respuestas emitidas por los profesores en formación:

**TABLA 1. ARGUMENTOS A FAVOR Y EN CONTRA SOBRE EL USO DEL DERIVE**

Argumentos a favor	Argumentos en contra
"Facilita y agiliza problemas matemáticos".	"El aspecto negativo sería el mal uso del programa en el ámbito escolar, si el profesor no sabe insertar la nueva tecnología en el aula".
"Muestra muy interesantemente la gráfica de funciones"	"No todas las escuelas pueden adquirir el programa".
"Permite formular conjeturas"	"Puede llegar a paralizar los cálculos mentales de los alumnos".
"Da con mucha facilidad los resultados"	"Con el pasar del tiempo reduciría la participación del docente en el aula".
"Abarca una gran cantidad de contenido matemático y es de fácil utilización".	"Puede causar dependencia".
"Puede ser instalado en cualquier computador".	"No en todos lados podemos encontrar computadoras".
"La graficación es muy importante para la visualización de las situaciones problemáticas"	"No usa pasos a seguir, cuando se efectúan las operaciones".
"Los alumnos se motivan a ver clases de Matemática".	

Los participantes opinaron que con el uso de la tecnología en el aula, y en particular del Derive, se incrementa la motivación de los estudiantes hacia el estudio de la Matemática. Por otra parte, este software da con mucha rapidez los resultados, permitiendo centrarse en la interpretación y por su gran capacidad gráfica, permite que se visualicen ciertos cambios, que de alguna manera aumentan la capacidad creativa y permite establecer conjeturas. Según éstos, el docente debe estar preparado para la incorporación de un programa como éste en el aula, de lo contrario puede causar dependencia del alumno con el software y paralizar sus procesos de pensamiento, haciendo un buen uso de la tecnología se mejoraría el proceso de enseñanza y aprendizaje, de lo contrario se entorpecería.

**TABLA 2. ARGUMENTOS A FAVOR Y EN CONTRA DEL USO DE LA MODELIZACIÓN**

Argumentos a favor	Argumentos en contra
"Desarrolla la capacidad analítica del alumno".	Ninguno
"Permite adoptar casos de la vida diaria"	
"Podemos profundizar más sobre los objetivos, en particular, matrices, sistemas de ecuaciones y vectores"	
"Desarrolla la agilidad mental y permite usar la Modelización".	
"Es una actividad apropiada para la adquisición de un conocimiento significativo".	
"Resulta muy llamativa para el estudiantado".	
"Los alumnos pueden visualizar la utilidad de algún contenido matemático en su entorno".	
"Permite reforzar conocimientos previos".	
"Permite libertad para abordar variados temas".	
"Facilita el aprendizaje y la internalización de los contenidos".	

En cuanto a la modelización matemática en la resolución de problemas de álgebra lineal, los profesores en formación, opinaron que este proceso incrementa la capacidad de análisis de los estudiantes, se puede profundizar más sobre los objetivos, en particular, matrices, sistemas de ecuaciones y vectores, además que desarrolla la agilidad mental; en fin es una actividad apropiada para la adquisición de un conocimiento significativo, tanto del entorno del alumno como del contexto algebraico.

### 3. CONCLUSIONES

Los resultados parecen indicar que sería necesaria la implantación gradual de las nuevas tecnologías junto a un cambio en los métodos de enseñanza y aprendizaje. Sin duda, se debe apostar por un modo de aprender y enseñar Matemática usando los conceptos de forma práctica, aumentando las capacidades de razonar y criticar de los estudiantes, de resolver problemas no rutinarios, de comunicar y utilizar contextualmente las ideas matemáticas y en conjunto contribuir a la comprensión del mundo físico, natural y social. Con la pregunta inicial de este trabajo, es decir, ¿Qué estrategias utilizan los estudiantes de la especialidad de Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador para enseñar álgebra lineal haciendo uso de la modelización matemática y de un software de Cálculo Simbólico como el Derive, a la vez que profundizan sus conocimientos algebraicos?; se asumió el reto de diseñar,

desarrollar y evaluar un programa de formación docente en el área de Matemática que integrara elementos innovadores y con un potencial didáctico reconocido como el uso de un software de cálculo simbólico y la modelización matemática en la resolución de problemas del mundo físico, natural y social.

En relación a los resultados de la evaluación del mencionado programa, que denominamos RPAL, en sus distintos momentos y como balance final destacan los siguientes aspectos:

1. Se observa la vigencia y utilidad de los contenidos desarrollados en el programa RPAL, ya que se encontró que el diseño del programa RPAL se adecua al contexto y a las demandas educativas, ajustándose a las necesidades de los profesores en formación, lo cual incide en su calidad. La evaluación de los indicadores sobre la actualidad de los contenidos, su relevancia, pertinencia y adecuación a las demandas educativas expresa la calidad del diseño.
2. Los resultados favorables de la evaluación hecha al establecimiento de los objetivos, actividades y medios de evaluación, así como la congruencia entre los objetivos y la necesidad de los profesores en formación, además de la coherencia entre los componentes del programa, revelan su buena calidad técnica.
3. El programa RPAL responde a las necesidades de los docentes de formación, estos tienen necesidades formativas en cuanto al uso de los SCS y su incorporación en la enseñanza del Álgebra Lineal; de modo que el programa RPAL se diseñó para responder a las necesidades reales inherentes al contexto de la UPEL, de allí su pertinencia.
4. La evaluación realizada por el grupo de apoyo (expertos), afirman que las actividades propuestas se corresponden con los propósitos y objetivos del programa, así como se ajustan a la orientación didáctica del mismo.
5. Se afirma que existe una buena congruencia entre los objetivos del programa, los medios y recursos, así como el tiempo establecido para la implementación del programa, es por ello que la evaluación de la viabilidad del programa se considera favorable.

Para realizar la evaluación del desarrollo del programa, se consideraron las producciones de los participantes y sus opiniones sobre los componentes del programa. El análisis de las producciones se centró en los componentes de interés perseguidos con el programa RPAL; es decir, aplicación de la resolución de problemas de álgebra lineal y la modelización matemática, uso del DERIVE y su respectiva integración en el diseño de actividades didácticas para la enseñanza del álgebra lineal escolar, todo esto con respecto a los objetivos perseguidos en el programa de formación. Como balance de la evaluación realizada al desarrollo del programa RPAL se puede afirmar que:

1. Los participantes abordaron las situaciones problémicas de diferentes maneras, teniendo en cuenta la presencia o la ausencia ciertos indicadores: la aplicación del proceso de modelización matemática, el uso del DERIVE, el proceso de visualización con énfasis en la graficación y la interpretación de los resultados obtenidos al resolver un problema.
2. En cuanto al uso adecuado de los SCS, puede decirse que los participantes mejoraron progresivamente su dominio y manejo del DERIVE. Inicialmente, los participantes centraron su atención en los cálculos numéricos u operaciones algebraicas; luego, hicieron uso del potencial gráfico del software y, finalmente, se atrevieron a realizar exploraciones, teniendo como base una situación problémica y el manejo de un mayor número de comandos y



herramientas disponibles en el mencionado software. Según los participantes el DERIVE permite el uso de representaciones simbólicas, el acceso a representaciones visuales dinámicas, y puede ser utilizado como medio de exploración y donde los alumnos pueden expresar ideas.

3. También se evidenciaron ciertas limitaciones en cuanto a la explicación de los procedimientos y la interpretación de los resultados. Posiblemente se deba a que ésta no es una práctica habitual en el aula; por lo general, una vez obtenido un resultado (la solución de una ecuación, una combinación lineal de vectores, el producto de matrices, etc), los estudiantes no revisan si satisface todas las condiciones dadas en el enunciado del problema y mucho menos lo relacionan con un contexto específico. Es más, difícilmente, aceptarían que un problema no tenga solución o que admita un conjunto solución, ya que, para un número importante de estudiantes, todo problema tiene solución y sólo una (y muchísimo más en el ámbito escolar). Por ello, durante el desarrollo de las sesiones de trabajo se enfatizó la necesidad de dedicar un tiempo prudencial al entendimiento de la situación problémica como a la interpretación de los resultados obtenidos.
4. Es importante señalar que los participantes en el programa de RPAL progresivamente hicieron uso de la modelización matemática a la hora de resolver los problemas, con énfasis en la fase de interpretación. De esta manera, se observó la integración de la modelización y el DERIVE en la resolución de la situaciones problémicas. Asimismo, la reflexión didáctica permitió que los futuros docentes hicieran uso de la modelización y del DERIVE en el diseño de una actividad didáctica.
5. Del análisis de las propuestas didácticas diseñadas por los profesores en formación, se pueden observar que las situaciones que plantearon son del mundo real, cercanas al entorno del alumno y relacionadas con contenidos de álgebra lineal manejados en la Escuela Básica. En cuanto a los materiales y recursos, diseñaron actividades didácticas centradas en los componentes del programa de formación RPAL con DERIVE.
6. La utilidad de la modelización estuvo referida a que permite representar matemáticamente situaciones de la vida real, lo que origina un acercamiento del alumno a su entorno a través de la resolución de problemas. Permite desarrollar y agilizar el proceso de resolución de problemas del mundo real, facilitando la comprensión y análisis de los problemas, además que por sus pasos o momentos, desarrolla en los alumnos su capacidad de abstracción e interpretación de los resultados; y además permite que los alumnos reflexionen y analicen acerca del trabajo que están realizando, incrementa su motivación. En este sentido, los participantes a través de sus respuestas, opinan que la modelización, incrementa el análisis y la comprensión en la resolución de problemas, lo que origina que el aprendizaje sea significativo, ya que se le está dando sentido y significado a la nueva información, logrando anclarse en un cuerpo de conocimientos.
7. Los profesores en formación opinan que la resolución de problemas algebraicos es una actividad central en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática y, en particular, del Álgebra Lineal escolar, es por ello que se deben plantear problemas creativos que guarden relación con el entorno de los alumnos, para así incrementar su motivación a la hora de resolverlos; es necesario despertar el interés y la curiosidad de los alumnos, que ayude a

formular conjeturas y a considerar varias alternativas. Por otra parte, el buen uso que se dé a este proceso origina un incremento de la capacidad analítica de los estudiantes.

En el momento de evaluación de los resultados, se analizaron las habilidades didácticas alcanzadas por los participantes en el programa de formación sobre el uso didáctico de la resolución de problemas algebraicos y de los SCS. Al comparar las producciones de los participantes en las primeras y en las últimas sesiones, se observa una mejoría en cuanto a la integración de los componentes del programa RPAL; es importante destacar que el dominio de las competencias didácticas alcanzadas por los futuros docentes se logró de forma progresiva a lo largo del curso – taller. Desde la cuarta sesión se observó que los participantes integraban la modelización matemática y el DERIVE en el diseño de actividades didácticas y en la resolución de problemas.

Los resultados de la evaluación del programa RPAL, son satisfactorios; sin embargo también se detectaron algunas carencias o limitaciones que fueron percibidas durante su puesta en marcha del mismo. Se notó y así lo hicieron saber los participantes en la hoja de evaluación final, que el tiempo dedicado a cada actividad era insuficiente, por lo que recomendaron ampliar las sesiones (dividir cada una en dos), o colocar menos actividades a realizar para poder tener tiempo en la realización de las reflexiones didácticas, importantísimas para ir adquiriendo las destrezas y habilidades necesarias para el logro de los objetivos. Es por ello que en la mayoría de las sesiones no se cumplieron con todas las actividades, sin embargo los participantes las realizaban fuera de las horas del curso.

En cuanto a las relaciones conceptuales establecidas por los participantes entre los contenidos abordados por ellos en el curso de Introducción al Álgebra Lineal y aquellos contenidos algebraicos tratados en el ámbito escolar, las mismas se materializaron mediante el análisis conceptual del contenido de Álgebra Lineal a considerar en el diseño de la propuesta didáctica y la presentación de mapas conceptuales.

En cuanto a las habilidades didácticas puestas en práctica por los participantes cuando diseñan estrategias metodológicas orientadas a la enseñanza del Álgebra Lineal en el ámbito escolar, se observó que los participantes propusieron situaciones problemas susceptibles de aplicarles el proceso de modelización integrándolo con el uso del DERIVE; además muestran competencias en cuanto al manejo del DERIVE y de cada uno de sus comandos y herramientas, lo cual se evidencia en el desarrollo de cada una de las actividades propuestas. El análisis de las producciones puso de manifiesto que los logros fueron notables. Los participantes se interesaron en la búsqueda de problemas adecuadas al entorno de sus potenciales alumnos de Educación Básica y Media.

Finalmente, mediante el diseño, implementación y evaluación del programa RPAL, ha quedado demostrada la factibilidad que los futuros docentes de Matemática integren eficientemente la modelización y un SCS como el Derive en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, específicamente del Álgebra Lineal. Esto implicaría la posible incorporación de programas similares, con componentes innovadores, en los programas de formación de profesores en la UPEL, con el propósito de lograr profesionales de cara a su futuro desempeño profesional en Educación Básica y Media.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acevedo, M. y Falk, M. (2000). Formación del pensamiento algebraico de los docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3(3), pp.245-264.

- Agudelo-Valderrama, C. (2007). La creciente brecha entre las disposiciones educativas colombianas, las proclamaciones oficiales y las realidades del aula de clase: Las concepciones de profesores y profesoras de matemática sobre el álgebra escolar y el propósito de su enseñanza. *Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 5(1), pp. 43-62.
- Berenguer, I (2003). Modelación Didáctica de la Representación y su formación en el Proceso de Resolución de Problemas. En J. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamérica de Matemática Educativa (vol. 16, pp.530-536)*. Santiago, Chile: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Berry, J., Lapp, D. y Nyman, M. (2008). Using technology to facilitate reasoning: lifting the fog from linear algebra. *Teaching Mathematics and its Applications*, 27(2), pp. 102-111.
- Cedillo, T. y Kieran, C. (2003). Initiating Students into Algebra with Symbol-Manipulating Calculators. En J. T. Fey, A. Cuoco, C. Kieran, y R. M. Zbiek (Eds.), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*, (Capítulo 13, pp. 219-239). Reston, VA: NCTM
- Darling-Hammond. L. (2006). Constructing 21st-Century Teacher Education. *Journal of Teacher Education*, 57(3), pp. 300-314.
- Dorier, J., Robert, A., Robinet, J. y Rogalski, M. (2000). The Obstacle of Formalism in Linear Algebra. En J. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*. (pp.85-124). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Ensor, P. (2001). From Preservice Mathematics Teacher Education to Beginning Teaching: A Study in Recontextualizing. *Journal for Research in Mathematics Education*. 32(3), pp. 296-320.
- Fernández-Ballesteros, R. (1996). Cuestiones Conceptuales Básicas en Evaluación de Programas. En R. Fernández-Ballesteros (Ed.), *Evaluación de Programas. Una guía práctica en ámbitos sociales, educativos y de salud* (pp. 21-47). Madrid: Síntesis.
- García, A. (1993). Enseñanza Experimental de la Matemática. *Epsilon*, 26, pp. 81-92.
- García, R. y Ortiz, J. (2007). Representaciones y modelización matemática en la resolución de problemas. En E. Castro y J. L. Lupiañez, (eds.), *Investigación en Educación Matemática: Pensamiento numérico*. (Libro homenaje a Jorge Cázares Solórzano. pp. 283-302). Granada, España: Universidad de Granada.
- Gay, A.S. y Jones, A.R. (2008). Uncovering Variables in the Context of Modeling activities. En *Algebra and Algebra Thinking in School Mathematics* (Seventieth Yearbook, pp. 211-221). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Gil, D; Pessoa, A; Fortuny, J. y Azcárate, C (2001). Formación del Profesorado de las Ciencias y la Matemática. Madrid, España: Editorial Popular.
- González, M., y Martínez, C. (1996). Resolución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales con Coeficientes Constantes con el Programa DERIVE. *Epsilon*, 36, pp. 387 – 406.
- Guzmán, M. (1993). *Tendencias Innovadoras en Educación Matemática*. [Libro en línea]. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura: Editorial Popular. Disponible: <http://www.oei.es/edumat.htm> [Consulta: 2002, Julio 04]
- Henn, H. (2007). Modelling in School- Chances and Obstacles. *The Montana Mathematics Enthusiast*, Monograph 3, pp.125-138.
- Huertos, M. (1995). El microordenador como instrumento de la enseñanza individualizada. *Epsilon*, 33, pp. 251-260.
- Iglesias, M. (2000). *Curso de Resolución de Problemas Geométricos asistido por Computadora* (Tesis de Maestría). Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Maracay.

- Labraña, A., Plata, A., Peña, C., Crespo, E. y Segura, R. (1995). *Álgebra Lineal. Resolución de Sistema Lineales*. Madrid: Síntesis
- Llorens, J. (1993). Un curso de Matemáticas con DERIVE. *Epsilon*, 26, pp. 61–80.
- Ortiz, J. (2000). *Modelización y Calculadora Gráfica en Formación Inicial de los Profesores de Matemáticas*. Granada, España: Universidad de Granada.
- Ortiz, J. (2004). Pensamiento Numérico y Algebraico. *Paradigma*, 25(1), pp. 225-239.
- Ortiz, J. (2006). Incorporación de la Calculadora Gráfica en el Aula de Matemática. Una Discusión Actual hacia la Transformación de la Práctica. *SAPIENS. Revista Universitaria de Investigación*. 7(2), pp. 139-157.
- Ortiz, J. y Iglesias, M. (2006). Uso de la Evaluación de programas en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas. En G. Martínez Sierra (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 19. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Ortiz, J., Rico, L. y Castro, E. (2008). La Enseñanza del Álgebra Lineal Utilizando Modelización y Calculadora Gráfica. Un Estudio con Profesores en Formación. *PNA*, 2(4), pp. 181-189
- Rico, L. (1997a). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-60). Barcelona: ICE/Horsori.
- Rico, L. (1997b). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. (Cap.7). Madrid: Síntesis
- Tucker, A. (1993). The Growing Importance of Linear Algebra in Undergraduate Mathematics. *College Mathematics Journal*. 24(1), pp. 3-9.
- Universidad Pedagógica Experimental Libertador (1996). *Diseño Curricular*. Caracas: Autor.