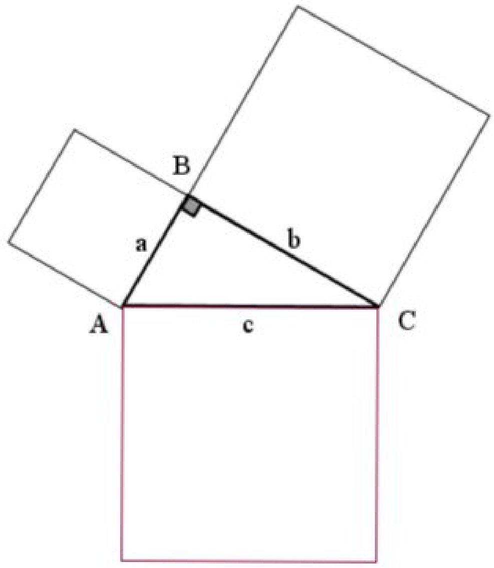
EL TEOREMA DE PITÁGORAS – PAPÚS

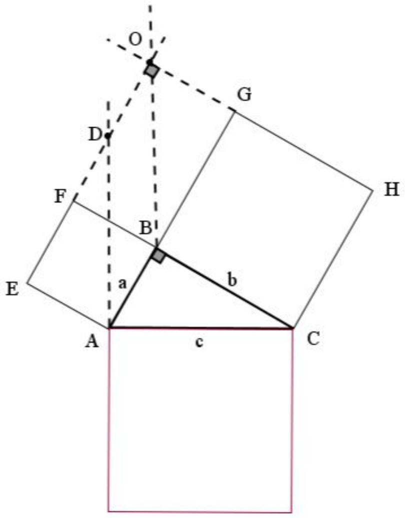
El conocido teorema de Pitágoras se suele enunciar de la siguiente manera:

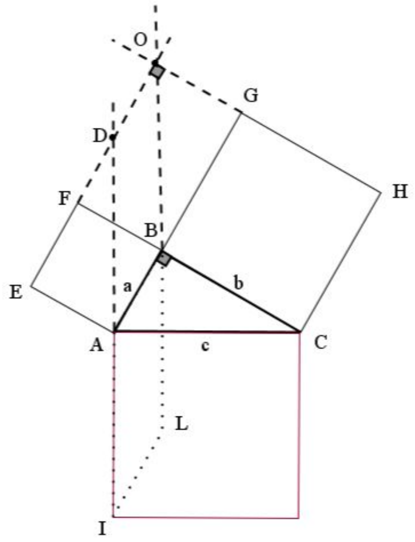
Teorema (Pitágoras): *Sea ABC un triángulo rectángulo de vértices A, B, y C, y sean a, b, y c las longitudes de los lados AB, BC, y AC. Entonces el área del cuadrado de lado c construido sobre el lado AC es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de lados a y b construidos sobre los lados AB y BC del triángulo respectivamente.*

Para visualizar el enunciado del teorema nos podemos ayudar con la siguiente figura:

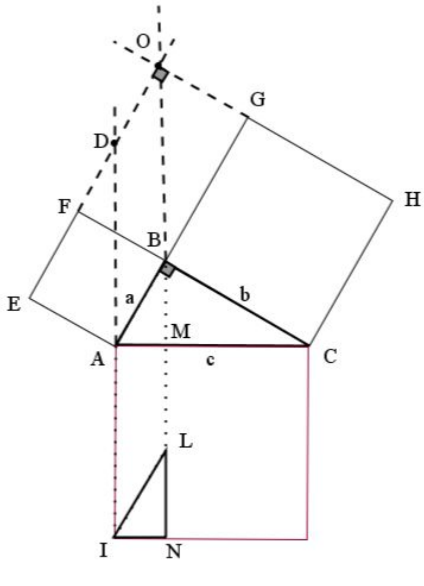


Una demostración clásica (de Papús de Alexandria, 300 A.D.) es la siguiente. Si trazamos la prolongación de los lados EF y GH de los cuadrados sobre los lados AB y BC (véase la siguiente figura), éstos se cortan en un punto que llamamos O. El ángulo en O es igual al ángulo en B y la figura BFOG resulta ser un rectángulo. El área del cuadrado AEFB es igual al área del paralelogramo BADO que es igual al área del paralelogramo ABIL.





El área del triángulo ABM (véase la siguiente figura) es la misma del área del triángulo ILN y por lo tanto el área del cuadrado AEFB de lado a es igual al área del rectángulo IAMN. Lo mismo se hace para el cuadrado de lado b. Resulta por lo tanto que el área de los cuadrados de lados a y b es igual al área del cuadrado de lado c.

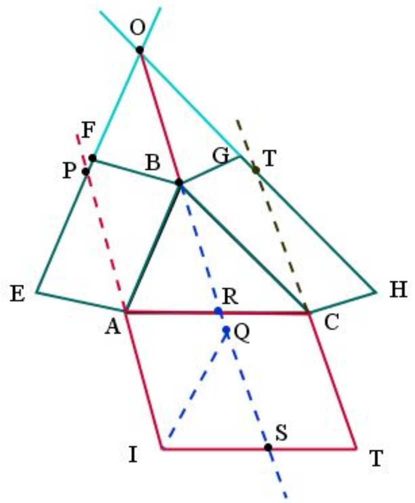


Siguiendo el mismo procedimiento, se puede demostrar el siguiente resultado:

> **Teorema (Pitágoras – Papús)**[1]**:** Sea ABC un triángulo de vértices A, B, y C. Sean P y Q dos paralelogramos construidos sobre los lados AB y AC. Sea O el punto de intersección de la prolongación de los lados de los paralelogramos paralelos a AB y BC. Sea R el paralelogramo sobre el lado AC t.q. los otros dos lados paralelos sean de la misma longitud de BO y paralelos a BO. Entonces el área de R es igual a la suma de las áreas de P y de Q.

Sean AEFB y BGHC dos paralelogramos construidos sobre los lados AB y BC respectivamente (véase la siguiente figura). Sea O el punto de intersección de las prolongaciones de los lados EF y GH paralelos a los lados del triángulo AB y BC respectivamente. Sea R el paralelogramo de lado AC y lado AI paralelo al segmento OB y de la misma longitud que OB.

El área del paralelogramo AEFB es la misma que el área del paralelogramo APOB, que es la misma del área del paralelogramo IARS. Se hace lo mismo con el otro paralelogramo. C.Q.D.

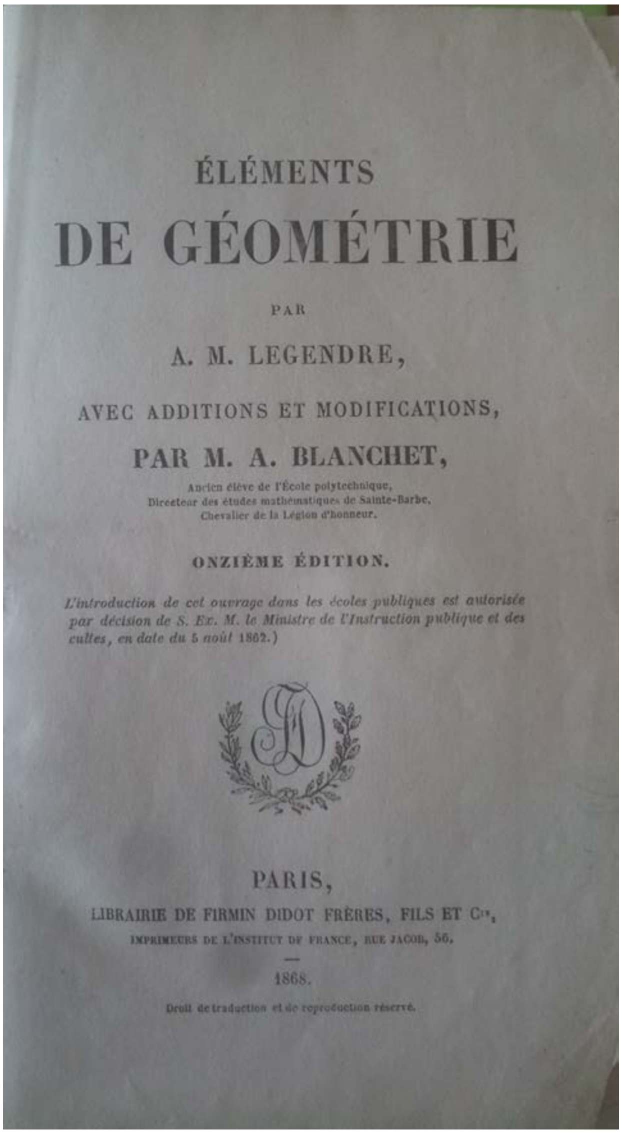


El teorema de Pitágoras sigue ahora como caso especial del teorema de Pitágoras – Papús, es decir, cuando el triángulo ABC es rectángulo y, además, los paralelogramos

[1] Véase p. 128 de: Adrien-Marie Legendre, Eléments de géométrie, Libraire de Firmin Didot Fréres, Fils et C., Paris, 1869 (XI edición, primera edición del 1794). El teorema también se enuncia en: Howard Eves, Great moments in mathematics (before 1650), The Mathematical Association of the America, 1983, véase p. 37, y en: George A. Jenning, Modern Geometry with Applications, 1994, véase p. 22.

son también cuadrados. Es interesante considerar el caso de un triángulo no rectángulo, pero, cuando los dos paralelogramos elegido son cuadrados.

El Teorema de Pitágoras – Papus se puede dejar como ejercicio a los estudiantes para generalizar el conocido Teorema de Pitágoras (como por ejemplo en el citado texto de Legendre), visto que la demostración es la misma, o se puede directamente proponer y luego dejar como ejercicio deducir el conocido Teorema de Pitágoras. Lo que sí está claro es que no puede no aparecer en el temario de la educación secundaria obligatoria de los estudiantes de hoy.



ÉLÉMENTS

DE GÉOMÉTRIE

PAR

A. M. LEGENDRE,

AVEC ADDITIONS ET MODIFICATIONS,

PAR M. A. BLANCHET,

Ancien élève de l'École polytechnique,
Directeur des études mathématiques de Sainte-Barbe,
Chevalier de la Légion d'honneur.

ONZIÈME ÉDITION.

L'introduction de cet ouvrage dans les écoles publiques est autorisée par décision de S. Ex. M. le Ministre de l'Instruction publique et des cultes, en date du 5 août 1862.)

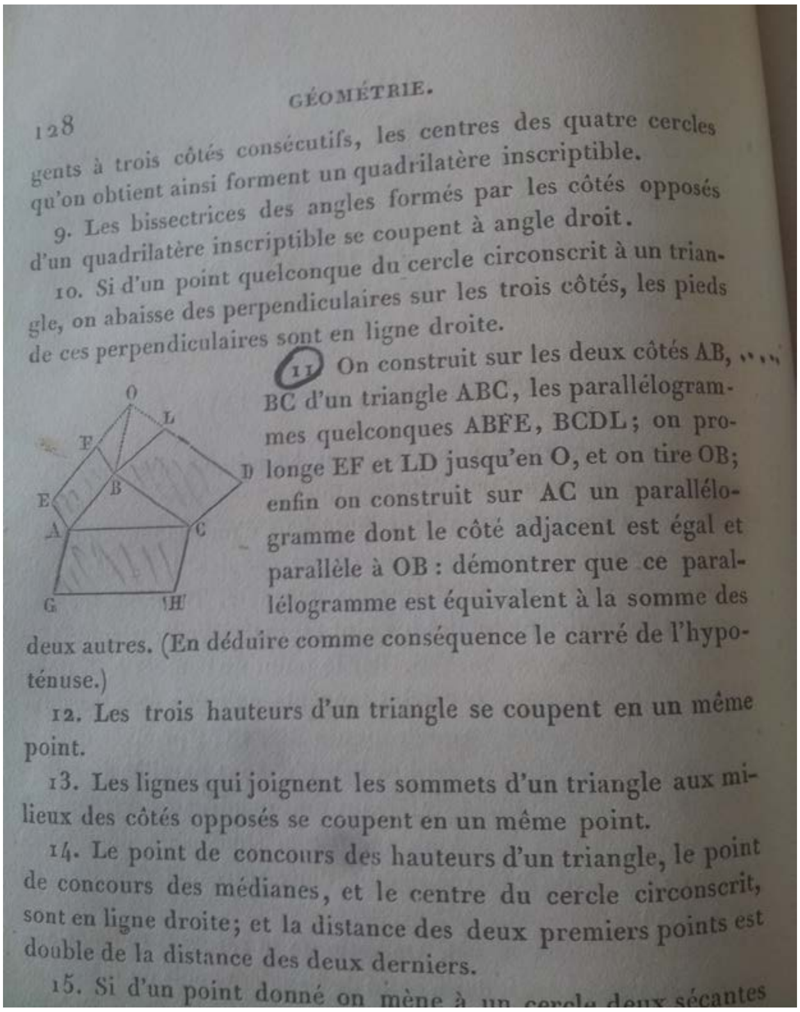
PARIS,

LIBRAIRIE DE FIRMIN DIDOT FRÈRES, FILS ET Cie,
IMPRIMEURS DE L'INSTITUT DE FRANCE, RUE JACOB, 56.

—

1868.

Droit de traduction et de reproduction réservé.



128 GÉOMÉTRIE.

gents à trois côtés consécutifs, les centres des quatre cercles qu'on obtient ainsi forment un quadrilatère inscriptible.

9. Les bissectrices des angles formés par les côtés opposés d'un quadrilatère inscriptible se coupent à angle droit.

10. Si d'un point quelconque du cercle circonscrit à un triangle, on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés, les pieds de ces perpendiculaires sont en ligne droite.

11. On construit sur les deux côtés AB, BC d'un triangle ABC, les parallélogrammes quelconques ABFE, BCDL; on prolonge EF et LD jusqu'en O, et on tire OB; enfin on construit sur AC un parallélogramme dont le côté adjacent est égal et parallèle à OB : démontrer que ce parallélogramme est équivalent à la somme des deux autres. (En déduire comme conséquence le carré de l'hypoténuse.)

12. Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point.

13. Les lignes qui joignent les sommets d'un triangle aux milieux des côtés opposés se coupent en un même point.

14. Le point de concours des hauteurs d'un triangle, le point de concours des médianes, et le centre du cercle circonscrit, sont en ligne droite; et la distance des deux premiers points est double de la distance des deux derniers.

15. Si d'un point donné on mène à un cercle deux sécantes

Carlo Giovanni Madonna[1]

[1] carlo.madonna@uam.es.